Nonstandard Analysis

0. Einleitung

Wir wollen den angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ zu einem angeordneten Körper $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ erweitern, so dass ein $\overset{\neq 0}{h} \in \mathbb{R}^*$ existiert mit

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \quad -r < h < r.$$

Für solche h schreiben wir $h \approx 0$ und sagen h ist infinitesimal.

Definiere $x \approx y$ durch $x - y \approx 0$.

Außerdem werden wir jede Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kanonisch zu einer Funktion $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ fortsetzen.

Unser Ziel ist es die Infinitesimalrechnung mit Hilfe dieser infinitesimalen Zahlen anstatt mit Limites zu entwickeln. Es soll also gelten:

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = c$.

$$:\iff \quad \frac{f^*(x_0 + h) - f^*(x_0)}{h} \approx c \quad \text{für alle} \quad 0 \neq h \approx 0.$$

Stetigkeit sollte sich so formulieren lassen:

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \left(x \approx x_0 \implies f^*(x) \approx f^*(x_0) \right).$$

Wie konstruieren wir $\mathbb{R}^*$?

Wir wiederholen in gewisser Weise die Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$. D.h. wir versehen die Menge

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{ f \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \}$$

aller $\mathbb{R}$-wertigen Folgen mit einer geeigneten Äquivalenzrelation.

~~In~~ Die $x \in \mathbb{R}^*$ mit $x \approx x_0 \in \mathbb{R}$ sind also nichts anderes als die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Und damit ist der Zusammenhang zwischen obigen Definitionen ~~und~~ von Differenzierbarkeit ~~und~~ bzw. Stetigkeit und den üblichen Definition nicht mehr besonders geheimnisvoll.

Um auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine geeignete Äquivalenzrelation zu definieren brauchen wir einen Ultrafilter auf $\mathbb{N}$:

Sei I eine Menge und $\mathcal{P}(I) = \{X \mid X \subseteq I\}$ ihre Potenzmenge. Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt Filter auf I, wenn gilt:

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(2) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

(3) $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \subseteq I \implies B \in \mathcal{F}$.

Ein Filter $\mathcal{U}$ auf I heißt Ultrafilter, wenn für alle $X \subseteq I$ entweder $X \in \mathcal{U}$ oder $I - X \in \mathcal{U}$ ist.

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf I heißt maximal, wenn es keinen Filter $\mathcal{F}'$ auf I gibt mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ und $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$.

$G \subseteq \mathcal{P}(I)$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn für ~~jedes eine~~ alle $X_1, \dots, X_n \in G$ gilt, dass $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$ ist.

Beispiele:

(1) Sei I unendlich. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq I \mid I - A \text{ endlich}\}$$

ein Filter auf I, der sog. Fréchet-Filter.

(2) Sei $x \in I$ fest. Dann ist $\mathcal{F} := \{A \subseteq I \mid x \in A\}$ ein Ultrafilter auf I.

Lemma

(a) Ist $\mathcal{F}$ eine nicht leere Familie von Filtern auf I, dann ist auch $\bigcap \mathcal{F}$ ein Filter auf I.

(b) Ist $\mathcal{C}$ eine $\subseteq$-Kette von Filtern auf I, dann ist auch $\bigcup \mathcal{C}$ ein Filter auf I.

(c) Hat $G \subseteq \mathcal{P}(I)$ die endliche Durchschnittseigenschaft, dann gibt es einen Filter $\mathcal{F}$ auf I mit $G \subseteq \mathcal{F}$.

Beweis: (a) und (b) sind einfach.

(c) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller $X \subseteq I$, ~~und~~ so dass ein endliches $\{X_1, \dots, X_n\} \subseteq G$ ex. mit $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \subseteq X$.

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter mit $G \subseteq \mathcal{F}$. $\boxtimes$

Lemma Ein Filter $\mathcal{F}$ auf I ist genau dann maximal, wenn es ein Ultrafilter ist.

Beweis: " ~~maximal~~ UF $\Rightarrow$ maximal "

Jeder Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist maximal: Ang. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{F} - \mathcal{U}$. Dann ist $I - X \in \mathcal{U}$. Also sind sowohl $I - X \in \mathcal{F}$ als auch $X \in \mathcal{F}$. D.h. $\emptyset = (I - X) \cap X \in \mathcal{F}$. Widerspruch!

" maximal $\Rightarrow$ UF "

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der kein Ultrafilter ist. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{F}$ nicht maximal ist. Sei daher $Y \subseteq I$ ~~~~ ~~dass werde~~ mit $Y, I - Y \notin \mathcal{F}$. Betrachte $G = \mathcal{F} \cup \{Y\}$. Dann hat G die endliche Durchschnittseigenschaft. Denn ist $X \in \mathcal{F}$, so ist $X \cap Y \neq \emptyset$. Andernfalls wäre nämlich $I - Y \supseteq X$ und ~~~~ daher $I - Y \in \mathcal{F}$.

Sind also $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}$, dann ist $X_1 \cap \dots \cap X_n \in \mathcal{F}$ und daher $Y \cap X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$. Da G die endliche Durchschnittseigenschaft hat ex. nach vorherigen Lemma ein Filter $\mathcal{F}' \supseteq G$. Wegen $Y \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}$ nicht maximal. $\boxtimes$

<u>Satz</u> Jeder Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{F}_0$ ein Filter auf I. Sei P die Menge aller Filter $\mathcal{F}$ auf I mit $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, geordnet durch $\subseteq$. Ist $\mathcal{C}$ eine Kette in P, dann ist $\bigcup \mathcal{C}$ ~~ein~~ $\in P$ und damit eine obere Schranke von $\mathcal{C}$. Nach dem Zornschen Lemma ex. also ein maximales Element $\mathcal{U}$ in P. Aufgrund des letzten Lemmas ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. ▨

Nun zur angekündigten Konstruktion von $\mathbb{R}^*$.

Dazu sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, der den Fréchet-Filter umfasst.

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ setze $\alpha \sim \beta \;:\Longleftrightarrow\; \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$.

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation:

- $\alpha \sim \alpha$, denn $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = \alpha(n)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$.
- $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$, denn $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = \beta(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \beta(n) = \alpha(n)\}$.
- $\alpha \sim \beta \wedge \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$, denn sind $X_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ und $X_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \beta(n) = \gamma(n)\} \in \mathcal{F}$, dann ist $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{F}$. Aber $X_1 \cap X_2 \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = \gamma(n)\} = X_3$. Somit ist $X_3 \in \mathcal{F}$.

Setze

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

und identifiziere $x \in \mathbb{R}$ mit der konstanten Folge $(x)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$.

Um $\mathbb{R}^*$ zu einem angeordneten Körper zu machen, müssen wir eine Addition $+^*$, Multiplikation $\cdot^*$ und Ordnung $\leq^*$ erklären.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Definiere

$$\alpha + \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{durch} \quad (\alpha+\beta)(n) = \alpha(n) + \beta(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{durch} \quad (\alpha \cdot \beta)(n) = \alpha(n) \cdot \beta(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ setze

$$\bar{\alpha} +^* \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta}$$
$$\bar{\alpha} \cdot^* \bar{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta}$$
$$\bar{\alpha} \,{}^*\!\!\leq \bar{\beta} \;:\Longleftrightarrow\; \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Wir müssen zeigen, dass $+^*$, $\cdot^*$ und $\leq^*$ wohldefiniert sind. Seien also $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$ und $\bar{\beta} = \bar{\beta}'$.

Dann ist $A_1 := \{ n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = \alpha'(n) \} \in \mathcal{F}$

$$A_2 := \{ n \in \mathbb{N} \mid \beta(n) = \beta'(n) \} \in \mathcal{F}.$$

Also ist $\underset{\displaystyle\mathcal{F}}{\underset{\cap}{A_1 \cap A_2}} \subseteq \{ n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) + \alpha'(n) = \beta(n) + \beta'(n) \} \in \mathcal{F}$.

Somit ist $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha' + \beta'}$.

Der Beweis von $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha' \cdot \beta'}$ geht analog.

Für $\le^*$ muß man zeigen:

$$A_3 := \{ n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \le \beta(n) \} \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \{ n \in \mathbb{N} \mid \alpha'(n) \le \beta'(n) \} \in \mathcal{F}.$$

Aber $\underset{\displaystyle\mathcal{F}}{\underset{\cap}{A_1 \cap A_2 \cap A_3}} \subseteq A \in \mathcal{F}$.

$\boxtimes$

~~Für~~ $+^*$, $\cdot^*$, $\le^*$ setzen $+$, $\cdot$, $\le$ fort.

D.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x +^* y = x + y$, $x \cdot^* y = x \cdot y$

und $x \le y \iff x \le^* y$.

Denn: ~~$x + y = \overline{(x)_n} + \overline{(y)_n} =$~~

$$x + y = \overline{(x+y)_n} = \overline{(x)_n + (y)_n} = \overline{(x)_n} +^* \overline{(y)_n} = x +^* y$$

$$x \le y \iff \{ n \in \mathbb{N} \mid \cancel{(x)_n \le} \; x \le y \} \in \mathcal{F} \underset{\text{Wohldef.}}{\iff} \overline{(x)_n} \le^* \overline{(y)_n}$$

$$\iff x \le^* y.$$

Da $+^*, \cdot^*, \leq^*$ Fortsetzungen von $+, \cdot, \leq$ sind, können wir im folgenden dafür wieder $+, \cdot, \leq$ schreiben ohne in Verwechslungsgefahr zu kommen.

<u>Satz</u> $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper. mit Nullelement 0 und Einselement 1.

<u>Beweis:</u> $\cancel{x+y = y+}$

- $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^* : \bar{x} + \bar{y} = \cancel{\ldots} \overline{x+y} = \overline{y+x} = \bar{y} + \bar{x}$
- $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^* : (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (\overline{x+y}) + \bar{z} =$
  $= \overline{x+y+z} = \bar{x} + (\overline{y+z}) = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$
- etc. für alle Körperaxiome
- $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : \bar{x} \leq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} + \bar{z} \leq \bar{y} + \bar{z}$

  $\bar{x} \leq \bar{y} \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$

  $\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid x_n + z_n \leq y_n + z_n\} \in \mathcal{F}$

  $\Rightarrow \bar{x} + \bar{z} \leq \bar{y} + \bar{z}$.

- $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} : \bar{x} \leq \bar{y}$ und $0 \leq \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} \leq \bar{y} \cdot \bar{z}$

  $\bar{x} \leq \bar{y}$ und $0 \leq \bar{z} \Rightarrow A_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$ u.
  $A_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid z_n \geq 0\} \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \cdot z_n \leq y_n \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$

  $\Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} \leq \bar{y} \cdot \bar{z}$.

- Bleibt zu zeigen, dass $\leq$ eine lineare Ordnung auf $\mathbb{R}^*$.
  Das geht ganz analog. $\boxtimes$

Da $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper ist, können wir wie üblich $-$, $:$ und $|\cdot|$ einführen.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^*$. Dann heißt

- x endlich (bzw. finit), falls $|x| \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$
- x unendlich (infinit), falls $|x| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- x infinitesimal, falls $|x| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
- x unendlich nahe bei y (schreibe $x \approx y$), falls $x - y$ infinitesimal.

<u>Lemma</u>

$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^*$ und es gilt:

(1) $x \approx y \iff \forall n \in \mathbb{N}: \{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - y_k| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$

(2) $x \approx y \implies -x \approx -y$

(3) $x_1 \approx y_1,\ x_2 \approx y_2 \implies x_1 + x_2 \approx y_1 + y_2$

(4) $x_1 \approx y_1,\ x_2 \approx y_2$ und x_1, x_2 endlich

$\implies x_1 \cdot x_2 \approx y_1 \cdot y_2$

<u>Beweis:</u> (1) $x \approx y \iff x - y \approx 0 \iff |x - y| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}: \{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - y_k| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$

Mit (1) sieht man sofort, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

(2) $x \approx y \overset{(1)}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - y_k| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} \mid |(-x_k) - (-y_k)| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}.$

$\Longrightarrow -x \approx -y$

(3) Sei $x_1 \approx y_1$ und $x_2 \approx y_2$. Also ist $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_1(k) - y_1(k)| \leq \frac{1}{n}\}$ $\in \mathcal{F}$ und $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_2(k) - y_2(k)| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$A := \{k \in \mathbb{N} \mid |x_1(k) + x_2(k) - y_1(k) - y_2(k)| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ ist.

Wähle also ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist nach Voraussetzung

$A_1 := \{k \in \mathbb{N} \mid |x_1(k) - y_1(k)| \leq \frac{1}{2n}\} \in \mathcal{F}$ und

$A_2 := \{k \in \mathbb{N} \mid |x_2(k) - y_2(k)| \leq \frac{1}{2n}\} \in \mathcal{F}$. Also ist

auch $\cancel{\{k \in \mathbb{N} \mid |x_1(k)}$ $A_1 \cap A_2 \subseteq A \in \mathcal{F}$.

$\cancel{A_1 \cap A_2}$

(4) geht ähnlich. $\boxtimes$

Satz

(a) ${}^*\mathbb{R}$ enthält von 0 verschiedene infinitesimale Elemente.

(b) ${}^*\mathbb{R}$ enthält infinite Elemente, d.h. $\mathbb{R}^*$ ist nicht archimedisch.

(c) ${}^*\mathbb{R}$ ist nicht ordnungsvollständig.

Beweis:

(a) Sei x die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$. Dann ist $\bar{x} \approx 0$ und $\bar{x} \neq 0$.

Denn $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0\} = \cancel{\emptyset \notin \mathcal{F}}\ \mathbb{N} \in \mathcal{F}$. Also ist $\bar{x} \neq 0$.

Für $\bar{x} \approx 0$ müssen wir $\forall n \in \mathbb{N}\ \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ zeigen. Sei also $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist
$\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \leq \frac{1}{n}\} = \{k, k+1, \ldots\} \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ den Frechet-Filter umfasst.

(b) Sei x die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$. Dann ist x infinit. Wir müssen $\forall n \in \mathbb{N}\ \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \geq n\} \in \mathcal{F}$ zeigen. Sei also $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist
$\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \geq n\} = \{k, k+1, \ldots\} \in \mathcal{F}$.

(c) $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ hat nach (b) eine obere Schranke, aber keine kleinste obere Schranke. Denn ist x eine obere Schranke, dann gilt $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also auch $n+1 \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit $n \leq x-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist auch $x-1$ eine obere Schranke.

$\boxtimes$

<u>Satz</u> Zu jedem finiten $x \in \mathbb{R}^*$ ex. genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit $x \approx r$.

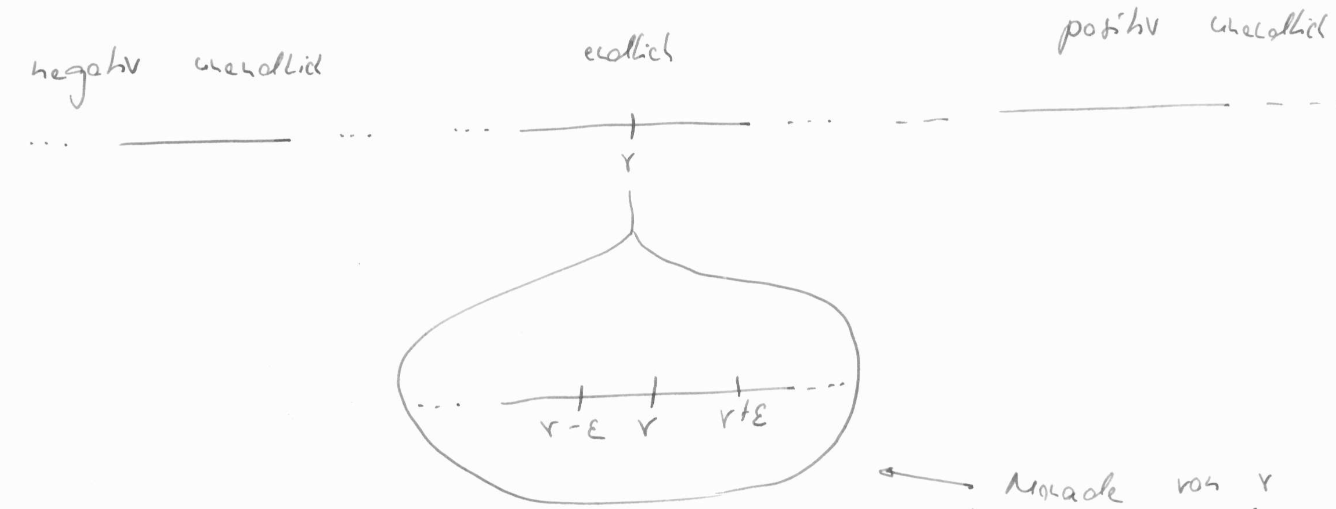
<u>Beweis:</u> Sei $r = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid s \leq x\}$. Dann ex. r aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und $r \approx x$. Denn ang. $r \not\approx x$. Dann gibt es $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < |r - s|$. Also ist entweder $s + \varepsilon < x$ oder $s - \varepsilon > x$. Beides widerspricht der Definition von r.

~~Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass~~

Eindeutigkeit: Ang. $r \approx x \approx s$. Dann gilt $r \approx s$, also $\underbrace{|r - s|}_{\in \mathbb{R}} = 0$. Da 0 das einzige infinitesimale Element in $\mathbb{R}$ ist. ☒

Das eindeutig bestimmte $r \in \mathbb{R}$ mit $x \approx r$ heißt der Standardteil von x. Wir schreiben $x^\circ = r$ oder $st(x) = r$.

Ein Bild von $\mathbb{R}^*$



$m(r) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \approx r\}$.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \mathbb{R}^*$.

Definiere

$$f^*(x) = \overline{(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}} \in \mathbb{R}^*.$$

Dann ist $f^*(x)$ nicht von der Wahl von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängig.

Denn ist $\overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(x_n')_{n\in\mathbb{N}}}$, so gilt $\{n\in\mathbb{N} \mid x_n = x_n'\} \in \mathcal{F}$.

Also gilt auch $\{n\in\mathbb{N} \mid f(x_n) = f(x_n')\} \in \mathcal{F}$ und daher

$\overline{(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(f(x_n'))_{n\in\mathbb{N}}}$.

Somit definiert $x \longmapsto f^*(x)$ eine Funktion $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

und es gilt

(i) $f^*(r) = f(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$

(ii) $f^*(\overline{\alpha}) = \overline{f\circ\alpha}$ für alle $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

<u>Lemma</u>

Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(f-g)^* = f^* - g^*$, $(f\cdot g)^* = f^*\cdot g^*$

(b) $(g\circ f)^* = g^* \circ f^*$

(c) $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow f^*(x) = f(x_0) + (x - x_0)g^*(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^*$

<u>Beweis:</u> (a) ${}^*(f+g)(\overline{\alpha}) = \overline{(f+g)\circ\alpha} = \overline{f\circ\alpha + g\circ\alpha} = \overline{f\circ\alpha} + \overline{g\circ\alpha}$

$= {}^*f(\overline{\alpha}) + {}^*g(\alpha)$,

übrige Aussagen analog.

(b) $^*(g\circ f)(\overline{\alpha}) = \overline{(g\circ f)\circ\alpha} = \overline{g\circ(f\circ\alpha)} = {}^*g(\overline{f\circ\alpha}) = {}^*g({}^*f(\overline{\alpha})) =$

$= ({}^*g\circ{}^*f)(\overline{\alpha})$

(c) genauso.

Satz Sei $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $x_0\in\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in x_0

(b) $(x\in\mathbb{R}^*$ und $x\approx x_0) \Longrightarrow {}^*f(x)\approx{}^*f(x_0)$.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b)

Sei $x_0\approx x\in\mathbb{R}^*$. Wir müssen $|{}^*f(x)-{}^*f(x_0)|\leq\frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ zeigen. Sei also $n\in\mathbb{N}$. Nach (a) ex. ein $0<\delta\in\mathbb{R}$ mit

$$\forall r\in\mathbb{R}\ (\ |r-x_0|\leq\delta \Longrightarrow |f(r)-f(x_0)|\leq\tfrac{1}{n}).$$

Sei $x=\overline{(x_n')_{n\in\mathbb{N}}}$. Dann gilt $\{n\in\mathbb{N}\mid |x_n'-x_0|\leq\delta\}\in\mathcal{F}$.

Also $\{n\in\mathbb{N}\mid |f(x_n')-f(x_0)|\leq\cancel{\delta}\,\frac{1}{n}\}\in\mathcal{F}$ nach Wahl von δ.

Somit ~~$\{n\in\mathbb{N}$~~ $|{}^*f(x)-f(x_0)|\leq\frac{1}{n}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a)

Ang. f ist nicht stetig in x_0. Dann gilt

$$\exists 0<\varepsilon\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n'\in\mathbb{R}$$

$$(\ |x_n'-x_0|\leq\tfrac{1}{n}\ \wedge\ |f(x_n')-f(x_0)|\geq\varepsilon).$$

Setze $x = \overline{(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}} \in \mathbb{R}^*$.

Dann gilt $x \approx x_0$ und $|{}^*f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Widerspruch!

$\boxtimes$

Korollar

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Dann sind auch $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ in x_0 stetig.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig, dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis:

(a) Sei $x_0 \approx x \in \mathbb{R}^*$. Dann ist $f^*(x_0) \approx f^*(x)$ und $g^*(x_0) \approx g^*(x)$ aufgrund der Stetigkeit. ~~Sa~~ Also ist auch $f^*(x_0) + g^*(x_0) \approx f^*(x) + g^*(x)$ nach früheren Lemma.

(b) Sei $x_0 \approx x \in \mathbb{R}^*$. Dann ist ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. Also

$$(g \circ f)^*(x) \underset{\text{Def}}{=} g^*({}^*f(x)) \underset{\text{Stetigkeit}}{\approx} g(f(x_0)) \underset{\text{Def.}}{=} (g \circ f)(x_0).$$

$\boxtimes$

Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = c$

(ii) $\dfrac{{}^*f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx c$ für alle $0 \neq h \approx 0$.

Beweis:

(i) $\iff$ $g(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ stetig in x_0 mit $g(x_0) = c$

$\iff$ $g^*(x) \approx c$ für alle $x \in \mathbb{R}^*$ mit $x \approx x_0$

vorheriger Satz

$\iff$ $\dfrac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx c$ für alle $x \in \mathbb{R}^*$ mit $x \approx x_0$, $x \neq x_0$

$g^*(x) = \dfrac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nach früherem Lemma

$\iff$ (ii). $\boxtimes$

Wir haben gesehen, dass sich einige Eigenschaften von $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ auf $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ übertragen (z.B. die Eigenschaften von angeordneten Körpern), andere jedoch nicht (z.B. Vollständigkeit). Wir wollen dies nun mit Methoden der math. Logik untersuchen. Dazu wiederholen wir einige Grundbegriffe der Logik erster Stufe.

Das <u>Alphabet einer Sprache</u> erster Stufe umfasst folgende Zeichen:

(a) Variablen $v_0, v_1, \ldots$

(b) Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$

(c) Quantoren $\exists, \forall$

(d) das Gleichheitszeichen $=$

(e) Klammern $)$, $($

(f) für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge von n-stelligen Relationssymbolen

(g) für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge von n-stelligen Funktionssymbolen

(h) eine (evtl. $\neq$ leere) Menge von Konstanten.

<u>Bsp:</u> Reden wir über angeordnete Körper, so verwenden wir die 2-stelligen Funktionssymbole $+, \cdot$, das 2-stellige Relationssymbol $\leq$ und die Konstanten $0, 1$.

Eine Sprache S ist durch ihr Alphabet gegeben.

Im Folgenden werden wir definieren, was eine Aussage φ in einer Sprache S ist und wann φ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

<u>Bsp:</u> $\exists x \; x \cdot x = -1$ gilt in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$\exists x \; x \cdot x = -1$ gilt nicht in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

<u>S-Terme</u> sind genau diejenigen Zeichenreihen (im Alphabet von S), die durch endlichmalige Anwendung der folgenden Regeln entstehen:

(1) Jede Variable ist ein Term

(2) Jede Konstante ist ein Term

(3) Sind $t_1, \dots, t_n$ S-Terme und ist f ein n-stelliges Relationssymbol, so ist $f\, t_1 \dots t_n$ ein S-Term.

<u>Beachte:</u> Wir schreiben offiziell $+11$ statt $1+1$!

<u>S-Ausdrücke</u> (bzw. <u>S-Formeln</u>) entstehen folgendermaßen:

(1) Sind t_0, t_1 S-Terme, so ist $t_0 = t_1$ ein S-Ausdruck.

(2) Sind $t_1, \dots, t_n$ S-Terme und ist R ein n-stelliges Relationssymbol, so ist $R\, t_1 \dots t_n$ ein S-Ausdruck.

(3) Ist φ ein S-Ausdruck, so ist auch $\neg\varphi$ ein S-Ausdruck

(4) Sind φ, ψ S-Ausdrücke, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ S-Ausdrücke.

(5) Ist φ ein S-Ausdruck und x eine Variable, so sind auch $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ S-Ausdrücke.

Natürlich wollen wir S-Ausdrücke in geeigneten Strukturen interpretieren.

Eine S-Struktur ~~ist~~ $\mathfrak{M}$ ist ein Paar (M, α), so dass gilt:

(a) M ist eine nicht-leere Menge (die sog. Trägermenge von $\mathfrak{M}$)

(b) α ist eine Abbildung, die jedem n-stelligen Relationssymbol R von S eine n-stellige Relation $\alpha(R)$ ~~auf~~ $\subseteq M^n$, jedem n-stelligen Funktionssymbol f von S eine n-stellige Funktion $\alpha(f) : M^n \to M$, jedem Konstantensymbol c von S ein Element $\alpha(c) \in M$ zuordnet.

Statt $\alpha(R)$ schreiben wir oft $R^{\mathfrak{M}}$.

<u>Beispiel</u>: Sei $S = \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Sprache der Körper.
Dann sind sowohl $\underset{\sim}{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}, +^{\mathbb{C}}, \cdot^{\mathbb{C}}, 0^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}})$ als auch $\underset{\sim}{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}})$ S-Strukturen.

Um festzustellen, ob eine S-Formel in einer S-Struktur gilt, muß man natürlich wissen, wofür die Variablen stehen.

Dazu dient der Begriff der Belegung:

Eine Belegung b in einer S-Struktur $\mathfrak{M}^{=(M,a)}$ ist eine Abb. $b : \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow M$.

Ist eine S-Struktur $\mathfrak{M}$ und eine Belegung b gegeben, so kann man rekursiv jedem S-Term einen Wert $t^{\mathfrak{M}}[b]$ in $\mathfrak{M}$ zuordnen:

(a) Für Variablen v_n ist $v_n^{\mathfrak{M}}[b] = b(v_n)$.

(b) Für Konstanten c ist $c^{\mathfrak{M}}[b] = c^{\mathfrak{M}}$

(c) Ist $t = f\, t_1 \dots t_n$, so ist $\cancel{t^{\mathfrak{M}}[b] =}$

$$t^{\mathfrak{M}}[b] = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[b], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[b]).$$

Nun können wir definieren, was es heißt, dass eine S-Formel φ in einer S-Struktur $\mathfrak{M}$ bei einer Belegung b gilt (schreibe: $\mathfrak{M} \models \varphi[b]$):

$$\mathfrak{M} \models t_1 = t_2\, [b] \quad :\Longleftrightarrow \quad t_1^{\mathfrak{M}}[b] = t_2^{\mathfrak{M}}[b]$$

$$\mathfrak{M} \models R\, t_1 \dots t_n\, [b] \quad :\Longleftrightarrow \quad R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[b], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[b])$$

$$\mathfrak{M} \models \neg\varphi\, [b] \quad :\Longleftrightarrow \quad \underline{\text{nicht}}\ \mathfrak{M} \models \varphi[b]$$

$\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)[b] \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[b]$ und $\mathfrak{M} \models \psi[b]$

$\mathfrak{M} \models (\varphi \vee \psi)[b] \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[b]$ oder $\mathfrak{M} \models \psi[b]$

$\mathfrak{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)[b] \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \psi[b]$ oder nicht $\mathfrak{M} \models \varphi[b]$

$\mathfrak{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[b] \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)[b]$ und $\mathfrak{M} \models (\psi \rightarrow \varphi)[b]$

$\mathfrak{M} \models \forall x\, \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[b\tfrac{a}{x}]$ für alle $a \in M$

$\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad$ ex. $a \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi[b\tfrac{a}{x}]$.

Dabei sei $b\frac{a}{x}$ die Belegung $(b\frac{a}{x})(\cancel{y}\, v_n) = \begin{cases} b(v_n) & \text{falls } v_n \neq x \\ a & \text{falls } v_n = x. \end{cases}$

<u>Beispiele:</u> $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \models v_1 + v_2 = v_3\, [b]$,

wenn $b(v_1) = 1$, $b(v_2) = 2$, $b(v_3) = 3$

aber $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \models \neg\, v_1 + v_2 = v_3\, [b]$,

wenn $b(v_1) = 1$, $b(v_2) = 1$, $b(v_3) = 3$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \models \cancel{\forall x}\ \forall x\, \exists y\ x \leq y$

(Wir lassen $[b]$ weg, wenn in der Formel keine freien Variablen vorkommen).

Kommen Variablen in einer Formel nicht frei vor, so spielt ihre Belegung für die Gültigkeit auch keine Rolle. Wir schreiben $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ für eine Formel in der höchstens $v_1, \dots, v_n$ frei vorkommen. Sei φ eine solche Formel, dann schreiben wir $\varphi[b(v_1), \dots, b(v_n)]$ statt $\varphi[b]$.

<u>Bsp:</u> $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \models v_1 + v_2 = v_3 \; [1, 2, 3]$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \not\models v_1 + v_2 = v_3 \; [1, 1, 3]$

Sei S eine Sprache, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ S-Strukturen.

Eine Abb. $\pi: M \longrightarrow N$ heißt elementare Einbettung, wenn für alle S-Formeln $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ und alle $x_1, \dots, x_n \in M$

$$\mathfrak{M} \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \iff \mathfrak{N} \models \varphi[\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)]$$ gilt.

<u>Satz</u> (Łoś)

Sei $S = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$ die Sprache der angeordneten Körper, $\underset{\sim}{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ und $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq, 0, 1)$.

Dann gilt für alle S-Formeln $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \varphi[\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}] \iff \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}.$$

<u>Beweis</u> durch Induktion über die Definition der Formeln.

<u>Induktionsanfang</u>: Für $\varphi \equiv t_1 = t_2$ und $\varphi \equiv t_1 \leq t_2$

wurde der Satz bereits bewiesen.

<u>Induktionsschritte</u>: Wir nehmen an, dass der Satz für φ ~~und ψ~~ bereits bewiesen ist und zeigen ihn für $\neg\varphi$.

$$\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \neg\varphi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n] \iff \underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \not\models \varphi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n]$$

$$\iff \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \notin \mathcal{F}$$

$$\overset{\mathcal{F}\ \text{UF}}{\iff} \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \not\models \varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

$$\iff \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \neg\varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

Für $\varphi \wedge \psi$: $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \varphi \wedge \psi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n] \iff$

$$\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \varphi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n] \text{ und } \mathbb{R}^* \models \psi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n]$$

$$\iff \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

$$\text{und } \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \psi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

$$\iff \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi \wedge \psi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

Beachte: $(x \in \mathcal{F} \wedge y \in \mathcal{F}) \iff x \cap y \in \mathcal{F}$.

Für $\exists x \varphi$: $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \exists x \varphi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n]$

$$\Rightarrow \exists \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^* \quad \underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \varphi[\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n]$$

$$\Rightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi[\alpha(k), \alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \exists x \varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}.$$

Gelte nun umgekehrt

$A := \{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \exists x \ \varphi[\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$.

Dann definiere $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, indem für alle $k \in \mathbb{N}$

$\alpha(k)$ so gewählt sei, dass $\underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi[\alpha(k), \alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]$,

und ~~αk~~ beliebig für die übrigen k.

Dann gilt

$$\{k \in \mathbb{N} \mid \underset{\sim}{\mathbb{R}} \models \varphi[\alpha(k), \alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)]\} \in \mathcal{F}$$

Also $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \varphi[\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n]$ und somit $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \exists x \ \varphi[\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n]$.

$\boxtimes$

~~Satz $id : \underset{\sim}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ ist eine elementare Einbettung.~~

~~Beweis:~~

<u>Satz</u> $j : \underset{\sim}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, $x \longmapsto \overline{(x)_{n \in \mathbb{N}}}$ ist eine elementare Einbettung

<u>Beweis:</u> Sei $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ gegeben und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \models \varphi[j(x_1), \dots, j(x_n)] \overset{\text{Satz v.}}{\underset{\text{Łoś}}{\Longleftrightarrow}} \{k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{R} \models \varphi[x_1, \dots, x_n]\} \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{R} \models \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

$\boxtimes$