1. Die Nonstandard-Welt

Wir haben in der Einleitung gesehen, dass sich alle Aussagen erster Stufe von $\mathbb{R}^{\#}$ auf $\mathbb{R}^{*}$ übertragen. Aber was ist mit der Vollständigkeit? Diese kann man nicht als Aussage erster Stufe über $\mathbb{R}$ formulieren, da sie eine Aussage über alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist.

Daher betrachten wir in Folgenden Strukturen der Form $(V(S), \in)$ wobei

$$V(S) = \bigcup \{ V_n(S) \mid n \in \omega \}$$
$$V_0(S) = S$$
$$V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathcal{P}(V_n(S))$$

$V(S)$ heißt die Superstruktur über S.

Als Sprache betrachten wir $\{\in\}$.

Man beachte, dass sich ein Großteil der Mathematik in $(V(\mathbb{R}), \in)$ mit Hilfe der Sprache $\{\in\}$ erster Stufe formulieren lässt.

z.B. $x \subseteq y$ läßt sich schreiben als $\forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$

$z = x \cap y$ als $\forall y (y \in z \iff y \in x \wedge y \in y)$

etc.

Wir schreiben $(\forall z \in x)\varphi$ für $\forall z (z \in x \Rightarrow \varphi)$

$(\exists z \in x)\varphi$ für $\exists z (z \in x \wedge \varphi)$.

In diesen Fall sagen wir, der Quantor sei (durch x) beschränkt. Treten in einer Formel φ nur beschränkte Quantoren auf, so heißt φ eine Σ_0-Formel.

Zurück zur Formalisierung der Mathematik in $V(\mathbb{R})$:

Schreibe (x,y) für $\{\{x\},\{x,y\}\}$,

(x,y,z) für $(x,(y,z))$, etc.

Identifiziere $+^{\mathbb{R}}$ mit $\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}, x+y=z\}$.

Schreibe $f: x \to y$ für $f \subseteq x \times y \wedge (\forall z \in x)(\exists z' \in y)((z,z') \in f)$

$\wedge (\forall z_0 \in x)(\forall z_1, z_2 \in y)((z_0,z_1) \in f \wedge (z_0,z_2) \in f \longrightarrow z_1 = z_2)$

$f(x) = y$ für $(x,y) \in f$

etc.

Für mehr Details zu diesem Vorgehen siehe Mengenlehreskript oder Buch von Lauchli + Rogge.

Wir wollen eine Abbildung

$$^*: V(\mathbb{R}) \longrightarrow V(^*\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad ^*\mathbb{R} = ^*(\mathbb{R})$$

betrachten.

Schreibe generell $^*x$ statt $^*(x)$.

Betrachte $X \in V(^*\mathbb{R})$

- X heißt <u>standard</u>, wenn $X = ^*y$ für ein $y \in V(\mathbb{R})$ ist.
- X heißt <u>intern</u>, wenn $X \in ^*y$ für ein $y \in V(\mathbb{R})$ ist.
- X heißt <u>extern</u>, wenn es nicht intern ist.

$^*: V(\mathbb{R}) \longrightarrow V(^*\mathbb{R})$ heißt Nonstandard-Erweiterung, wenn folgende Prinzipien gelten:

<u>Extensionsprinzip</u>: $^*r = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subsetneq ^*\mathbb{R}$

<u>Transferprinzip</u>: * ist eine Σ_0-elementare Einbettung, d.h. für alle Σ_0-Formeln $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ und $x_1, \dots, x_n \in V(\mathbb{R})$ gilt

$$V(\mathbb{R}) \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \iff V(^*\mathbb{R}) \models \varphi[^*x_1, \dots, ^*x_n].$$

<u>Polysaturiertheit</u>: Sei $\{X_i \mid i \in V(\mathbb{R})\}$ eine Familie von internen Mengen, die die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt, dann ist $\bigcap \{X_i \mid i \in V(\mathbb{R})\} \neq \emptyset$.

Lemma Eine Menge $X \in V(\mathbb{R})$ ist genau dann intern, wenn $X \in {}^*(V_n(\mathbb{R})) = {}^*V_n({}^*\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Sei $X \in {}^*(V_n(\mathbb{R}))$. Dann ist X offensichtlich intern.

Sei umgekehrt X intern, d.h. $X \in {}^*y$ für ein $y \in V(\mathbb{R})$.
Dann ex. nach Definition von $V(\mathbb{R})$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit
$y \in V_n(\mathbb{R})$. Wegen Transfer gilt also $X \in {}^*y \in {}^*V_n({}^*\mathbb{R})$. (*)
Außerdem ist $V(\mathbb{R}) \models \forall y \in V_n(\mathbb{R})\ \forall x \in y \quad x \in V_n(\mathbb{R})$.
Sohit $V({}^*\mathbb{R}) \models \forall y \in {}^*V_n({}^*\mathbb{R})\ \forall x \in y \quad x \in {}^*V_n({}^*\mathbb{R})$. (**)
Aus (*) und (**) folgt aber die Behauptung. ☐

Lemma Sei $X \in V(\mathbb{R})$. Dann gilt

$${}^*(\mathcal{P}(X)) = {}^*\mathcal{P}({}^*X) - \{y \in {}^*X \mid y \text{ intern}\}.$$

Beweis: Sei $y \in {}^*\mathcal{P}({}^*X)$. Dann ist y offensichtlich intern.

Andererseits gilt $V(\mathbb{R}) \models \forall y \in \mathcal{P}(X)\ \forall z \in y : z \in X$

Also $V({}^*\mathbb{R}) \models \forall y \in {}^*\mathcal{P}({}^*X)\ \forall z \in y : z \in {}^*X$.

D.h. ist $y \in {}^*\mathcal{P}({}^*X)$, so ist auch $y \subseteq {}^*X$.

Sei umgekehrt $y \subset {}^*X$ intern. Dann ex. nach der letzten Lemma ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in {}^*V_n({}^*\mathbb{R})$. Es reicht also z.z:

$$V({}^*\mathbb{R}) \models (\forall y \in {}^*V_n({}^*\mathbb{R}))[(\forall x \in y : x \in {}^*X) \Rightarrow y \subset {}^*X \Rightarrow y \in {}^*\mathcal{P}({}^*X)].$$

Das gilt aber nach Transferprinzip. Denn

$$V(\mathbb{R}) \models \forall y \in V_n(\mathbb{R}) : y \subseteq x \Rightarrow y \in R(x).$$

□

Das Transferprinzip garantiert, dass sich die *-Bilder von Objekten der Standardwelt im Wesentlichen verhalten wie ihre Urbilder. Insbesondere ist ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper:

Lemma

(a) ~~$(\mathbb{R}$~~ ${}^*\mathbb{R} = ({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq)$ ist ein angeordneter Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1. Es ist $^*-$ die Subtraktion in ${}^*\mathbb{R}$, ~~und~~ $^*:$ die Division und $^*|\cdot|$ der Betrag.

(b) Es sind ${}^*+, {}^*-, {}^*\cdot, {}^*:$ und ${}^*\leq, {}^*<, {}^*|\cdot|$ Fortsetzungen von $\leq, <, |\cdot|$.

Beweis: Transferprinzip. Beachte, dass alle Körperaxiome Σ_0-Aussagen über $V(\mathbb{R})$ sind. □

Da $^*+$, $^*-$, $^*\cdot$, $^*:$ und $^*\leq$, $^*<$, $^*|\cdot|$

Fortsetzungen von $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\leq$, $<$, $|\cdot|$ sind

werden wir die Sterne wieder weglassen. Insgesamt

also Transferprinzip können wir mit $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\leq$, $<$, $|\cdot|$

wie gewohnt Rechnen.

Das gilt aber nach Transferprinzip, dass

$$V(\mathbb{R}) \models \forall y \in V_1(\mathbb{R}) : y \subseteq x \to y \in \mathcal{P}(x).$$

Die internen Mengen sind von besonderer Bedeutung, da sich Aussagen, die in $V(\mathbb{R})$ für alle Teilmengen einer Menge X gelten, in $V(^*\mathbb{R})$ auf alle internen Teilmengen von $^*X$ übertragen.

Lemma Sei $\emptyset \subseteq A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ intern und nach oben beschränkt.
Dann ex. $\sup(A) \in {}^*\mathbb{R}$.

Beweis: Es gilt aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

$$V(\mathbb{R}) \models (\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))\,[(\exists x \in \mathbb{R}\,\forall y \in A : y \leq x) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\,\{(\forall y \in A : y \leq x) \wedge (\forall z \leq x\ \exists y \in A\ z \leq y)\})]$$

Also gilt auch

$$V(^*\mathbb{R}) \models (\forall A \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{R})))[\ \ldots\ ].$$

Das ist aber nach obiger vorheriger Lemma gerade die Behauptung. ☐

Lemma Sei $\emptyset \neq A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ intern, dann hat A ein kleinstes Element.

Beweis: $V(\mathbb{R}) \models \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\, [\emptyset \neq X \Rightarrow \exists z \in X\, (y \in X \Rightarrow z \leq y)]$

Also auch $V(\mathbb{R}) \models \forall X \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}))\, [\ldots]$.

□

(internes Definitionsprinzip)

Lemma Seien $y_1, \ldots, y_n, Z$ intern und φ eine Σ_0-Formel. Dann ist auch $\{x \in Z \mid V({}^*\mathbb{R}) \models \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ intern.

Beweis: Seien $y_1, \ldots, y_n, Z \in {}^*V_m(\mathbb{R})$. Es gilt

$$V(\mathbb{R}) \models \forall y_1, \ldots, y_n, z \in V_m(\mathbb{R})\ \exists w \in V_{m+1}(\mathbb{R})$$
$$\forall x \in z : \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x \in w$$

Also nach Transferprinzip auch

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \forall y_1, \ldots, y_n, z \in {}^*V_m({}^*\mathbb{R})\ \exists w \in {}^*V_{m+1}({}^*\mathbb{R})$$
$$\forall x \in z : \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x \in w.$$

somit $V({}^*\mathbb{R}) \models \exists w \in {}^*V_{m+1}({}^*\mathbb{R})\ \forall x \in z : \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x \in w$.

D.h. $V({}^*\mathbb{R}) \models \exists w \in {}^*V_{m+1}({}^*\mathbb{R})\ w = \{x \in z \mid \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$

bzw. $V({}^*\mathbb{R}) \models \{x \in z \mid \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\} \in {}^*V_{m+1}({}^*\mathbb{R})$.

□

Lemma $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ und ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ sind extern.

Beweis: Ang. $\mathbb{R}$ ist intern. Dann ex. nach einer früheren Lemma $r := \sup(\mathbb{R})$. Wähle $s \in \mathbb{R}$ mit $r - 1 < s < r$. Dann ist $r < s+1 \in \mathbb{R}$. Widerspruch also, dass $r = \sup(\mathbb{R})$.

Ang. ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ ist intern. Dann ist nach oben vorherigen Lemma auch $\mathbb{R} = \{ r \in \mathbb{R}^* \mid r \notin {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R} \}$ intern. Widerspruch!

Ang. ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ist intern. Dann ex. nach einer früheren Lemma $n := \min({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N})$. Betrachte $n-1$. Ang. $n-1 \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $n = (n-1) + 1 \in \mathbb{N}$. Das widerspricht der Definition von n. Also ist $n - 1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Das widerspricht aber auch ~~aber Def.~~ $n = \min({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N})$.

Ang. $\mathbb{N}$ ist intern. Dann ist nach oben vorherigen Lemma auch ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ intern. Widerspruch!

□

Lemma Seien $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $a \notin \mathbb{R}$ oder $b \notin \mathbb{R}$. Dann ist ${}^*[a,b] = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ eine interne Menge, die keine Standardmenge ist.

Beweis: Offensichtlich ist $^*[a,b]$ nach den internen Definitionsprinzip intern. Ang. $^*[a,b]$ ist eine Standardmenge, d.h. $^*[a,b] = {}^*x$ für ein $x \in V(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$V(^*\mathbb{R}) \models \exists a, b \in {}^*\mathbb{R} : {}^*x = \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$$

bzw. $V(^*\mathbb{R}) \models \exists a, b \in {}^*\mathbb{R} \; \forall y \in {}^*\mathbb{R} :$

$$y \in {}^*x \iff a \leq y \leq b.$$

Also gilt nach Transferprinzip auch

$$V(\mathbb{R}) \models \exists a, b \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} : y \in x \iff a \leq y \leq b.$$

Wähle solche $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$V(\mathbb{R}) \models \forall y \in \mathbb{R} : y \in x \iff a \leq y \leq b.$$

Wieder nach Transferprinzip also

$$V(^*\mathbb{R}) \models \forall y \in {}^*\mathbb{R} : y \in {}^*x \iff {}^*a \leq y \leq {}^*b.$$

Somit

$$V(^*\mathbb{R}) \models {}^*x = \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid {}^*a \leq y \leq {}^*b\} = {}^*[{}^*a, {}^*b].$$

Das widerspricht aber der Annahme, dass $a \notin \mathbb{R}$ oder $b \notin \mathbb{R}$.

$\boxtimes$

Seien die Begriffe finit, infinit, infinitesimal und $\approx$ wie in der Einleitung definiert.

Lemma

(a) Es gilt ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \neq \emptyset$ und jedes $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ist infinites Elt.

(b) $1/h$ ist für $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ein von 0 verschiedenes infinitesimales Element.

Beweis: Alles außer ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \neq \emptyset$ ist klar. Das kann man mit der Polysaturiertheit von $V({}^*\mathbb{R})$ zeigen. Betrachte die Mengen $x_n = \{k \in {}^*\mathbb{N} \mid k \geq n\}$. Nach der internen Definitionsprinzip sind alle x_n für $n \in \mathbb{N}$ intern. Offensichtlich erfüllt $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Somit gilt aufgrund der Polysaturiertheit $\bigcap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Man könnte alternativ ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \neq \emptyset$ auch aus ${}^*\mathbb{R} \neq \mathbb{R}$ beweisen.

$\square$

Lemma Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) x, y finit $\Rightarrow x \pm y$, $x \cdot y$ finit

(ii) x finit und $x \approx y \Rightarrow y$ finit

(iii) x nicht infinitesimal $\Rightarrow \frac{1}{x}$ finit.

Beweis: (i) Da x, y finit sind ex. $n, k \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq k$, $|y| \leq k$.

Also gilt $|x \pm y| \leq n + k$ und $|x \cdot y| \leq n \cdot k$. Also sind

$x \pm y$, $x \cdot y$ finit.

(ii) Da x finit und $x \approx y$ ex. $k, n \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq k$ und

$|x - y| \leq \frac{1}{n}$. Also ist $|y| = |x - (x - y)| \leq k + \frac{1}{n}$.

Somit ist y finit.

(iii) Ang. $\frac{1}{x}$ ist infinit. Dann gilt $\frac{1}{x} > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Also $x < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist x infinitesimal. $\lightning$.

□

Lemma

(a) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation

(b) $x_1 \approx y_1$, $x_2 \approx y_2 \Rightarrow x_1 \pm x_2 \approx y_1 \pm y_2$

(c) ($x_1 \approx y_1$, $x_2 \approx y_2$ und x_1, x_2 finit) $\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \approx y_1 \cdot y_2$

(d) ($x_1 \approx y_1$, $x_2 \approx y_2$, x_1 finit und $x_2 \not\approx 0$) $\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \approx \frac{y_1}{y_2}$.

Beweis: (a) • $x \approx y \Rightarrow y \approx x$

Da $x \approx y$ gilt $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also auch $|y-x| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $y \approx x$.

• $x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx y$

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir müssen $|x-z| \leq \frac{1}{n}$ zeigen. Da $x \approx y$ und $y \approx z$, gilt $|x-y| \leq \frac{1}{m}$ und $|y-z| \leq \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wähle $m = 2n$. Dann gilt $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.

• $x \approx x$

offensichtlich ist $0 = |x-x| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b), (c) + (d) : übung. ▨

Lemma

(a) Ist $x \in {}^*\mathbb{R}$ finit, so ex. es eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{R}$ mit $x \approx r$. Wir bezeichnen dieses mit $^\circ x$ bzw. $st(x)$.

(b) Für $x_1, x_2 \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:

- $st(x_1 \pm x_2) = st(x_1) \pm st(x_2)$
- $st(x_1 \cdot x_2) = st(x_1) \cdot st(x_2)$
- $st\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{st(x_1)}{st(x_2)}$ falls $st(x_2) \neq 0$
- $x_1 \leq x_2 \Rightarrow st(x_1) \leq st(x_2)$.

Beweis:

(a) geht wie der entsprechende Beweis in der Einleitung.

(b) Setze $r_1 = st(x_1)$ und $r_2 = st(x_2)$. Dann gilt

$r_1 \approx x_1$ und $r_2 \approx x_2$. Also $x_1 \pm x_2 \approx r_1 \pm r_2$

nach der vorherigen Lemma. Somit gilt wegen der

Eindeutigkeit in (a) $st(x_1 \pm x_2) = r_1 \pm r_2 = st(x_1) \pm st(x_2)$.

Die nächsten beiden Aussagen gehen analog.

Für die letzte Aussage beachte, dass $st(x_1) \leq x_1 + \frac{1}{k}$ und

~~$st(x_2) \leq x_2$~~ $x_2 \leq st(x_2) + \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Also (wg. $x_1 \leq x_2$)

$st(x_1) \leq x_1 + \frac{1}{k} \leq x_2 + \frac{1}{k} \leq st(x_2) + \frac{2}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. D.h. aber

$st(x_1) \leq st(x_2)$.

□

Satz (Underspill- / Overspill - Prinzip)

~~(a)~~ Sei: $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ intern.

(a) Enthält A beliebig große finite Zahlen, so enthält es auch ein infinites Element.

(b) Enthält A beliebig kleine infinite Elemente, so enthält es auch eine finite Zahl.

Satz (Underspill - und Overspill - Prinzipien)

Sei $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ intern.

(a) Enthält A beliebig große (positive) finite Zahlen, so enthält es auch ein infinites Element

(b) Enthält A beliebig kleine infinite Elemente, so enthält es auch eine finite Zahl.

(c) Enthält A alle hinreichend kleinen infiniten Elemente, so enthält es auch alle hinreichend großen finiten Zahlen

(d) Enthält A alle hinreichend großen finiten Zahlen, so enthält es auch alle hinreichend kleinen infiniten Zahlen

(e) Die Aussagen (a) - (f) gelten auch für $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$.

(f) Enthält $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ intern ~~alle~~ beliebig kleine positive nicht infinitesimale Zahlen, so enthält A auch eine infinitesimale Zahl.

Beweis:

(a) Nach einem vorausgehenden Satz hat A ein Supremum r in ${}^*\mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist dieses infinit. Nach Definition des Supremums ex. ein $x \in A$ mit $r - 1 < x \leq r$. Offensichtlich ist x infinit.

(b) Sei ${}^*\mathbb{R}^+ = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid x > 0\}$. Sei $A' = \{x \in {}^*\mathbb{R}^+ \mid \exists y \in A : x \geq y\}$.

Dann ist A' nach dem internen Definitionsprinzip intern.

Aber ~~$\{x \in {}^*\mathbb{R}^+ \mid x$ infin~~ ${}^*\mathbb{R}^+ - \mathbb{R} \subseteq A'$ und ${}^*\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}$ ist extern. Also ist $A' \neq {}^*\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}$, d.h. es enthält eine finite Zahl.

(c) Sei $y_0 \in {}^*\mathbb{R}$ infinit, so dass $x \in A$ für alle $x \leq y_0$ gilt.

Betrachte $A' = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall y \geq x \, (y \in A \vee y > y_0)\}$.

~~Aber~~ Dann ist A' nach dem internen Definitionsprinzip intern. Also ex. ein finites $x \in A'$. Dann gilt aber $y \in A$ für alle finiten $y \geq x$.

(d) Ähnlich wie (c). Betrachte $A' = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall y \leq x \, (y \in A \vee y \leq y_0)\}$ wobei $y_0 \in {}^*\mathbb{R}$ finit mit $\forall x \geq y_0 : x \in A$.

(e) Im wesentlichen wie für $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$.

(f) Betrachte $A' = \{\frac{1}{x} \mid x \in A\}$ und wende ~~A~~ (a) an.

$\boxed{}$

Offensichtlich gibt es noch weitere Underspill- und Overspill-Prinzipien.

Wir wenden die Prinzipien der Nonstandard Analysis nun auf die Grundbegriffe der Analysis an.

Eine Folge ist eine Abb $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Nach Transferprinzip gilt also ${}^*a : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$. Gilt $V(\mathbb{R}) \models a(n) = r$, so gilt $V({}^*\mathbb{R}) \models {}^*a({}^*n) = {}^*r$. Da aber ${}^*n = n$ und ${}^*r = r$ aufgrund des Extensionalitätsprinzips, gilt $V({}^*\mathbb{R}) \models {}^*a(n) = r$. Also ist ${}^*a(n) = a(n)$. D.h. ${}^*a$ ist eine Fortsetzung von a.

<u>Satz</u> Es gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ genau dann, wenn ${}^*a_N \approx a$ ist für alle infiniten N.

<u>Beweis:</u> $\Rightarrow$: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Dann ex. für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit $V(\mathbb{R}) \models \forall n \geq n_i : |a_n - a| \leq \frac{1}{i}$.

Also gilt nach Transfer für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \forall n \in {}^*\mathbb{N} : n \geq n_i \Rightarrow |{}^*a_n - a| \leq \frac{1}{i}.$$

Insbesondere gilt für alle infiniten $N \in {}^*\mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{N}$

$$|{}^*a_N - a| \leq \frac{1}{i}.$$

Also ${}^*a_N \approx a$ für alle infiniten $N \in {}^*\mathbb{N}$.

Sei: umgekehrt $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$. Dann ~~gilt~~ ex. ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit

$\forall n \; \exists k \geq n \; |a_k - a| > \varepsilon$. Nach Overspill ex. also ein

infinites $N \in {}^*\mathbb{N}$ mit $|a_N - a| > \varepsilon$.

□

Eine interne Folge ist eine interne Abb. $a : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$.

Ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen, so ist also ${}^*(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

gerade die Menge aller internen Folgen.

Satz Sei $a : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ eine interne Folge. Dann gilt

$\lim_{n\to\infty} {}^\circ a_n = a$ genau dann, wenn $a_N \approx a$ ist für alle

hinreichend großen infiniten N.

Beweis: Sei zunächst $\lim_{n\to\infty} {}^\circ a_n = a$. Dann ex. eine streng monoton wachsende

Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $|{}^\circ a_n - a| < \frac{1}{n}$ also $|a_k - a| < \frac{1}{k}$

für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq g(n)$. Sei

$$A_n := \{ k \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall h \in {}^*\mathbb{N} \; ({}^*g(h) \leq k \leq k \to |a_k - a| < \tfrac{1}{k}) \}.$$

~~Nach dem Overspill-Prinzip ex. für alle $n \in \mathbb{N}$ ein infinites $K_n \in A_n$.~~

Nach dem internen Definitionsprinzip sind alle A_n intern.

Außerdem erfüllt $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die ~~interne~~ endl. Durchschnittseigenschaft.

Also gilt aufgrund der Polysaturiertheit $\bigcap \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$

Sei $\kappa \in \bigcap \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $a_N \approx a$ für alle

infiniten $N \in {}^*\mathbb{N}$.

Sei umgekehrt $\lim_{n \to \infty} {}^\circ a_n \neq a$. Dann ex. ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit

$\forall m \; \exists n \geq m \quad |a_n - a| > \varepsilon$. Sei $\kappa \in {}^*\mathbb{N}$ infinit. Betrachte

die Mengen

$$A_m = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid m \leq n < \kappa \wedge |a_n - a| > \varepsilon\}.$$

Nach dem internen Definitionsprinzip hat alle A_n inhalt.

Außerdem erfüllt $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die endl. Durchschnitts-

eigenschaft. Somit ist $\bigcap \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Also ex. ein infinites

$N < \kappa$ mit $a_N \neq a$. ☑

Eine interne Menge M heißt *-endlich, wenn ein $N \in {}^*\mathbb{N}$ und

eine interne Bijektion $f: N \to M$ existiert. Aufgrund des

Transferprinzips verhalten sich *-endliche Objekte im Wesentlichen

wie endliche Objekte. Hat man z.B. *-endlich viele Zahlen $a_i \in {}^*\mathbb{R}$ mit $1 \leq i \leq N$

gegeben, so kann man ihre Summe $\sum a_i = (a_1 + \ldots + a_N)$

bilden. Ist M *-endlich, so ex. nach Transferprinzip genau ein

$N \in {}^*\mathbb{N}$ so dass eine interne Bijektion $f: N \to M$ existiert.

Wir nennen dieses N die Elementzahl von M und schreiben

$|M|$.

Genauer geht man so vor:

Sei: $\mathcal{A} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid 0 \neq N \in \mathbb{N}\}$.

Für $a \in \mathcal{A}$ sei $\sum a = \frac{1}{N}\, a(0) + \dots + a(N-1)$.

Dann ist nach Transferprinzip

$${}^*\mathcal{A} = \{a : \mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R} \mid 0 \neq N \in {}^*\mathbb{N},\ a \text{ intern}\}$$

$${}^*\textstyle\sum : {}^*\mathcal{A} \to {}^*\mathbb{R}.$$

Korollar Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} {}^*a_n = a$ genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{N} {}^*a_n \approx a$ für alle unendlichen N gilt.

□

Satz Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

(2) $\forall x \in {}^*\mathbb{R} : x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx c.$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \approx x_0$. Wir müssen $|{}^*f(x) - c| \leq \frac{1}{n}$ zeigen. Wegen (1) gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$V(\mathbb{R}) \models \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - c| \leq \tfrac{1}{n}.$$

Nach Transferprinzip gilt

$$V(^*\mathbb{R}) \models \forall x \in {}^*\mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |{}^*f(x) - c| \leq \tfrac{1}{\xi}.$$

Insbesondere gilt also für $x \approx x_0$ $|{}^*f(x) - c| \leq \frac{1}{\xi}$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Wegen (2) gilt

$$V(^*\mathbb{R}) \models \{x \mid \forall n \in {}^*\mathbb{N} \}: |x - x_0| \leq \tfrac{1}{n} \Rightarrow |{}^*f(x) - c| \leq \varepsilon$$

für alle unfiniten $n \in {}^*\mathbb{N}$. Wegen Underspill ex. also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, das die Formel erfüllt. Setze $\delta = \frac{1}{n_0}$.

Dann gilt

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - c| \leq \varepsilon.$$

□

<u>Satz</u> Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) f ist stetig in x_0

(2) $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$:
$x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$.

<u>Beweis</u>: Wende den letzten Satz an. □

Satz Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) f ist in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = c$

(2) $\dfrac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx c$ für alle $x \approx x_0$, $x \neq x_0$.

Beweis: Folgt aus der reellen Satz wie in der Erklärung. ☒

Sei: $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Setze

$$T = \{0, \tfrac{1}{N}, \tfrac{2}{N}, \dots, \tfrac{N-1}{N}, 1\} = \{k \cdot \tfrac{1}{N} \mid k \in {}^*\mathbb{N},\ 0 \le k \le N\}.$$

~~Eine~~ Nach der internen Definitionsprinzip ist T intern.

Eine interne Funktion $F: T \to {}^*\mathbb{R}$ heißt S-stetig,

wenn

(1) $F(t)$ für alle $t \in T$ finit ist

(2) $\forall\, t, t' \in T : \quad t \approx t' \implies F(t) \approx F(t')$.

Lemma Sei $F : T \to {}^*\mathbb{R}$ S-stetig. Für $t \in T$ definiere

$$f({}^\circ t) = {}^\circ F(t).$$

Dann ist f aufgrund der S-Stetigkeit wohldefiniert und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Ang. f ist nicht stetig in $x \in [0,1]$. Dann ex. ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $x' \in [0,1]$ mit $|x - x'| < \frac{1}{k}$ und $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$ ex. Seien $t, t' \in T$ mit $t \approx x$ und $t' \approx x'$. Dann ist $|t - t'| < \frac{1}{k}$ und wegen $F(t) \approx f(x)$ und $F(t') \approx f(x')$, $|F(t) - F(t')| > \varepsilon$. Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \exists t, t' \in T \left(x - \tfrac{1}{k} < t, t' < x + \tfrac{1}{k} \right.$$
$$\left. \wedge\ |F(t) - F(t')| > \varepsilon \right)$$

Nach dem Overspill-Prinzip ex. also ein infinites $K \in {}^*\mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft. Somit ex. $t, t' \in T$ mit $t \approx t'$ aber $|F(t) - F(t')| > \varepsilon$. Das Widerspricht der S-Stetigkeit von F.

□

Zwischenwertsatz Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(0) \leq 0 \leq f(1)$. Dann ex. ein $r \in [0,1]$ mit $f(r) = 0$

Beweis: $V(\mathbb{R}) \models \forall x \in \mathcal{P}([0,1])$

$(x$ endlich $\Rightarrow$ ex. kleinstes $t \in x$

mit $f(t) \leq 0 \leq f(t^+))$

wobei t^+ der Nachfolger von t in x sei.

Also $V(^*\mathbb{R}) \models \forall x \in \mathcal{P}([0,1])\,(x$ *-endlich $\Rightarrow \ldots)$.

Insbesondere gilt die Aussage also für T. D.h. es ex. ein kleinstes $t \in T$ mit $^*f(t) \leq 0 \leq {}^*f(t + \frac{1}{N})$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt allerdings $^*f(t) \approx {}^*f(t + \frac{1}{N})$. Also $^*f(t) \approx {}^*f(t + \frac{1}{N}) \approx 0$. Setze $r = {}^\circ t$. Dann gilt wieder wegen Stetigkeit $f(r) \approx {}^*f(t) \approx 0$. Da aber $f(r) \in \mathbb{R}$ ist, bedeutet dies $f(r) = 0$.

□

Extremwertsatz Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f ein Maximum an.

Beweis: Sei $m = \max\{ {}^*f(t) \mid t \in T \}$. Da T *-endlich ist, gilt aufgrund des Transferprinzips $m = {}^*f(t)$ für ein $t \in T$. Setze $r = {}^\circ t$. Dann gilt wegen Stetigkeit $f(r) = {}^\circ m$. Und ${}^\circ m$ ist ein Maximum von f: Für jedes $s \in [0,1]$ wähle ein $u(s) \in T$ mit $u(s) \approx s$. Dann gilt $m \geq {}^*f(u(s))$. Wegen Stetigkeit ist aber ${}^*f(u(s)) \approx f(s)$. Also ${}^\circ m \geq f(s)$.

□

Satz (Keislers Theorem über überall. Summen)

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Sei $I_B : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

(1) $I_B(0,v) = I_B(0,u) + I_B(u,v)$ für alle $0 < u < v \leq 1$.

(2) $\dfrac{{}^*B[x, x+dx)}{dx} \approx {}^*f(x)$ für $0 < dx \approx 0$ und $x, x+dx \in {}^*[0,1]$.

Dann ist

$$I(0,1) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Satz

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und beschränkt

Sei: $I: T \to {}^*\mathbb{R}$, $t = \frac{h}{N} \longmapsto \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{N} {}^*f\left(\frac{i-1}{N}\right)$.

Dann gilt für alle $t \in T$:

$$^\circ I(t) = \int_0^{^\circ t} f(s)\, ds.$$

Beweis: Sei $s \in [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ setze

$$I_n = \sum_{\{k \in \mathbb{N} \mid 0 < \frac{k}{n} < s\}} \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

Da f Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \int_0^s f(t)\, dt.$$

Also $\int_0^s f(t)\, dt \approx I_N$ für $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Bleibt zu zeigen, dass $I(t) \approx I(s)$ für alle $t \approx s \in T$ ist.

Sei o.E. $s < t$. Dann ist $I(t) = I(s) + \sum_{i=k}^{\ell} \frac{1}{N} {}^*f\left(\frac{i-1}{N}\right)$

wobei: $t = \frac{\ell}{N}$ und $s = \frac{k}{N}$. Sei $|f(x)| < M$ für alle $x \in [0,1]$.

Dann gilt also $I(t) \leq I(s) + (t-s) \cdot M$. Somit

$I(t) \approx I(s)$.

□

Satz (Existenzsatz von Peano)

Sei $f: \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Dann ex. für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion $y: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$y(0) = y_0$$

und $$\frac{dy}{dt} = f(y(t), t) \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Beweis: Definiere rekursiv eine interne Funktion $y: {}^*\mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ durch

$$y\left(\frac{k}{N}\right) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} {}^*f\left(y\left(\frac{i}{N}\right), \frac{i}{N}\right) \frac{1}{N}$$

um zu sehen, dass dies möglich ist, wende Transfer auf

$$V(\mathbb{R}) \models \forall n \in \mathbb{N}\ \forall f: \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}\ \exists y: \left\{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n}{n}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}: y\left(\tfrac{k}{n}\right) = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f\left(y\left(\tfrac{i}{n}\right), \tfrac{i}{n}\right)\tfrac{1}{n}.$$

Sei $|f(x,t)| \le M$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$. Dann gilt

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} {}^*f\left(y\left(\tfrac{i}{N}\right), \tfrac{i}{N}\right) \tfrac{1}{N} \right| \le \frac{k}{N} \cdot M.$$

Also $|y(t)| \le |y_0| + M$ für alle $t \in T$. $y(t_1) \approx y(t_2)$.

Außerdem gilt wie im letzten Beweis ${}^\vee$ für alle $t_1 \approx t_2 \in T$

D.h. y ist S-stetig. Definiere $y: [0,1] \to \mathbb{R}$

durch $$y({}^\circ t) = {}^\circ y(t).$$

Nach einer früheren Lemma ist y stetig. Also gilt

${}^*y(t) \approx {}^*y(t')$ falls $t \approx t'$. Sei $t \in {}^*[0,1]$. Dann gilt

$${}^*f(t, {}^*y(t)) \approx {}^*f(t, {}^*y({}^\circ t)) = {}^*f(t, y({}^\circ t)) = {}^*f(t, {}^\circ y(t))$$

$$\approx {}^*f(t, y(t))$$

(Stetigkeit von f / Stetigkeit von f.)

Somit ex. für alle $t \in {}^*[0,1]$ ein infinitesimales $\delta_t > 0$ mit

$$\varphi_t \equiv |{}^*f(t, {}^*y(t)) - {}^*f(t, y(t))| < \delta_t.$$

Betrachte $A = \{r \in {}^*\mathbb{R} \mid r > 0 \wedge \forall t \in {}^*[0,1] : \varphi_t\}$.

Dann ist A intern und enthält ~~alle~~ ~~standard~~ ~~positive~~ beliebig ~~hinreichend~~ kleine, nicht infinitesimale, positive Zahlen. Also ex. auch ein $\delta \approx 0$ ~~$\delta > 0$~~ mit $\delta \in A$. D.h.

$$|{}^*f(t, {}^*y(t)) - {}^*f(t, y(t))| < \delta \quad \text{für alle } t \in {}^*[0,1].$$

Somit ist

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} {}^*f({}^*y(\tfrac{i}{N}), \tfrac{i}{N}) \tfrac{1}{N} - \sum_{i=0}^{k-1} {}^*f(y(\tfrac{i}{N}), \tfrac{i}{N}) \tfrac{1}{N} \right| \leq \tfrac{k}{N} \cdot \delta.$$

Also gilt für alle $t = \frac{k}{N} \in T$

$$\int_0^{\circ t} f(y(s), s)\, ds = {}^{\circ}\left(\sum_{i=0}^{k-1} {}^{*}f\left({}^{*}y\left(\tfrac{i}{N}\right), \tfrac{i}{N}\right) \tfrac{1}{N} \right)$$

Satz über Riemann-Integrale

$$= {}^{\circ}\left(\sum_{i=0}^{k-1} {}^{*}f\left(y\left(\tfrac{i}{N}\right), \tfrac{i}{N}\right) \tfrac{1}{N} \right)$$

$$= y({}^{\circ}t) - y_0$$

Insbesondere ist y differenzierbar und Ableitung Lösung der Behauptung. ▨

Nun wollen wir die Nonstandard Methoden noch auf die Grundbegriffe der Topologie anwenden.

Sei im Folgenden $(X, \tau) \in V(\mathbb{R})$ ein topologischer Raum.

Die Elemente von τ heißen offen. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $a \in X$, wenn es offenes $O \in \tau$ ex. mit $a \in O \subseteq U$. Wir definieren für $a \in X$

$$\tilde{a} := \bigcap \{ {}^*U \mid U \text{ ist Umgebung von } a \}$$

und nennen $\tilde{a}$ die Monade von a. Beachte ${}^*a \in \tilde{a}$.

Lemma: Für alle $a \in X$ ex. ein $G \in {}^*\tau$ mit ${}^*a \in G \subseteq \tilde{a}$

Beweis: Für jede Umgebung U von $a \in X$ sei

$$B_U := \{ O \in {}^*\tau \mid {}^*a \in O \subseteq {}^*U \}.$$

Dann ist jedes B_U intern. Außerdem erfüllt $\mathcal{B} := \{ B_U \mid U \text{ ist Umgebung von } a \}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Denn jedes B_U enthält ja mindestens ${}^*U$. Also enthält der Durchschnitt $B_{U_1} \cap \dots \cap B_{U_n}$ mindestens ${}^*U_1 \cap \dots \cap {}^*U_n$.

Aufgrund der Polyadenheit ex. also ein $G \in \bigcap \mathcal{U}$.

Dieses ist wie gewünscht. ☐

Lemma Sei $G \in X$. Dann ist G genau dann offen, wenn

$\tilde{a} \subseteq {}^*G$ für alle $a \in G$ gilt.

Beweis: Sei G offen und $a \in G$. Da G eine Umgebung von a ist, gilt $\tilde{a} \subseteq {}^*G$.

Sei umgekehrt $\tilde{a} \subseteq {}^*G$ für alle $a \in G$. Sei $b \in G$. Nach oben (letztes Lemma) ex. ein $A \in {}^*\tau$ mit ${}^*b \in A \subseteq \tilde{b}$. Also gilt

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \exists x \in {}^*\tau \; ({}^*b \in x \subseteq {}^*G)$$

Nach dem Transferprinzip gilt also $\exists x \in \tau \; (b \in x \subseteq G)$. Da b beliebig war, heißt das aber, dass G offen ist. ☐

Korollar Eine Menge $F \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $a \in F$ für alle $a \in X$ mit $\tilde{a} \cap {}^*F \neq \emptyset$ gilt.

Satz (X, τ) ist ein Hausdorff-Raum* genau dann, wenn $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$ für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt.

Beweis: Sei (X,τ) ein Hausdorff-Raum und $a \neq b \in X$.

Dann ex. Umgebungen U, V von a bzw. b mit $U \cap V = \emptyset$.

Nach Transferprinzip also ${}^*U \cap {}^*V = \emptyset$. Aber $\tilde{a} \subseteq {}^*U$ und $\tilde{b} \subseteq {}^*V$. Also $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$.

Sei umgekehrt $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$. Dann ex. nach früheren Lemma $G_a, G_b \in {}^*\tau$ mit ${}^*a \in G_a \subseteq \tilde{a}$ und ${}^*b \in G_b \subseteq \tilde{b}$. Also

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \exists x,y \in {}^*\tau \; ({}^*a \in x \wedge {}^*b \in y \wedge x \cap y = \emptyset)$$

Nach Transferprinzip ex. also $x, y \in \tau$ mit $a \in x$, $b \in y$ und $x \cap y = \emptyset$. Da a, b beliebig waren ist (X,τ) ein Hausdorff-Raum.

□

Sei: $\tilde{X} = \bigcup \{\tilde{a} \mid a \in X\}$. Ist (X,τ) ein Hausdorff-Raum, so ex. nach dem letzten Satz zu ~~$\alpha \in \tilde{X}$~~ genau ein $a \in X$ mit $\alpha \in \tilde{a}$. Dieses a heißt der Standardteil von α. Wir schreiben $a = {}^\circ\alpha$ oder $st(\alpha)$. Beachte, dass diese Definition im Fall von $\mathbb{R}$ mit der alten Definition übereinstimmt. In diesem Fall ist $\tilde{\mathbb{R}}$ die Menge der finiten Elemente von ${}^*\mathbb{R}$.

Schreibe $\alpha \approx a$ für $\alpha \in \tilde{a}$.

Satz Seien $(X, \tau), (Y, \sigma) \in V(\mathbb{R})$ topologische Räume. Sei $a \in X$.

Dann ist $f: X \to Y$ genau dann stetig in a, wenn

${}^*f(\alpha) \approx f(a)$ gilt für alle $\alpha \in {}^*X$ mit $\alpha \approx a$.

Beweis: Sei f stetig in a und sei $\alpha \in \tilde{a}$. Wähle eine Umgebung ~~U~~ von $f(a)$. Dann ex. aufgrund der Stetigkeit von f eine Umgebung V von a mit

$$V(\mathbb{R}) \models \forall x \in X \,(x \in V \to f(x) \in U).$$

Also

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \forall x \in {}^*X \,(x \in {}^*V \to {}^*f(x) \in {}^*U).$$

Da $\alpha \in {}^*V$, gilt somit ${}^*f(\alpha) \in {}^*U$. Da U eine beliebige Umgebung von $f(a)$ war, also ${}^*f(\alpha) \in \widetilde{f(a)}$ bzw. ${}^*f(\alpha) \approx f(a)$.

Sei umgekehrt ${}^*f(\alpha) \approx f(a)$ für alle $\alpha \in \tilde{a}$. Dann wähle wieder eine Umgebung U von $f(a)$. Nach einer früheren Lemma ex. $A \in {}^*\tau$ mit ${}^*a \in A \subseteq \tilde{a}$. Also ${}^*f(\alpha) \in {}^*U$ für alle $\alpha \in A$. Somit

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \exists x \in {}^*\tau \,({}^*a \in x \wedge \forall y \in x \; {}^*f(y) \in {}^*U).$$

Also

$$V(\mathbb{R}) \models \exists x \in \tau \, (a \in x \wedge \forall y \in x \; f(y) \in G)$$

Aber das bedeutet gerade, dass eine Umgebung x von a mit $f[x] \subseteq G$ existiert. D.h. f ist stetig in a.

Lemma $K \subseteq X$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ genau dann, wenn für alle $\alpha \in {}^*K$ ein $a \in K$ mit $\alpha \approx a$ existiert.

Beweis: Sei K kompakt und $\alpha \in {}^*K$. Nach Vor. gilt für ein $a \in K$ $\alpha \approx a$. Dann ex. für jedes $a \in K$ eine offene Umgebung U_a von a mit $\alpha \notin {}^*U_a$. Da $\{U_a \mid a \in K\}$ eine offene Überdeckung von K ist und K kompakt ist, ex. endlich viele $a_1, \dots, a_k \in K$ mit

$$K \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k} \quad \text{bzw.} \quad {}^*K \subseteq {}^*U_{a_1} \cup \dots \cup {}^*U_{a_k}.$$

Da $\alpha \in {}^*K$ ist, ex. also ein i mit $\alpha \in {}^*U_{a_i}$. Widerspruch!

Sei nun umgekehrt $\mathcal{G}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiere für alle $\alpha \in {}^*K$ ein $a \in K$ mit $\alpha \approx a$. $\circledast$ Für jedes $G \in \mathcal{G}$ ~~setze~~ sei $A_G := {}^*K - {}^*G$ und $\mathcal{A} := \{A_G \mid G \in \mathcal{G}\}$.

$\circledast$ Nach Vor. ex. eine endliche Teilmenge $\{G_1, \dots, G_n\} \subseteq \mathcal{G}$ mit $K \subseteq G_1 \cup \dots \cup G_n$.

$\mathcal{L}$ erfüllt aufgrund unserer Voraussetzung, dass hier endliche Teilüberdeckung existiert die endliche Durchschnittseigenschaft.

Außerdem ist jedes $A_G \in \mathcal{L}$ intern. Also ex. ein $\alpha \in \bigcap \{ {}^*U - {}^*G \mid G \in \mathcal{G} \}$ wegen Polysaturiertheit. Sei $a \in U$, so dass $\alpha \approx a$.

Dann ex. ein $G \in \mathcal{G}$ mit $a \in G$. Aber G ist offen und $\alpha \approx a$. Also $\alpha \in {}^*G$. Widerspruch!

□

Satz Sei (X, τ) ein Hausdorff-Raum. Sei $A \subseteq \tilde{S}$ intern.

Dann ist $st[A]$ abgeschlossen.

Beweis: Sei x ein Berührpunkt von $st[A]$. D.h. $U \cap st[A] \neq \emptyset$ für alle $x \in U \in \tau$. Sei $b \in U \cap st[A]$. Dann gilt $b \approx st(c)$ für ein $c \in A$. Nach der standard Charakterisierung von offenheit gilt also $\tilde{b} = \tilde{st}(c) \subseteq {}^*U$. Somit $c \in {}^*U \cap A$ und ${}^*U \cap A \neq \emptyset$ für die $x \in U \in \tau$. Betrachte nun $\mathcal{L} = \{ {}^*U \cap A \mid x \in U \in \tau \}$.

Dann hat $\mathcal{L}$ die endl. Durchschnittseigenschaft. Wegen Polysaturiertheit ex. also $y \in \{ {}^*U \cap A \mid x \in U \in \tau \}$. Für dieses gilt $y \approx x$. Also $x = y^\circ \in st[A]$.

□

Übrigens: Ist (X, τ) regulär, so ist $st[A]$ sogar kompakt.

Natürlich müssen wir noch die Existenz der Abb. $*: V(\mathbb{R}) \to V(\mathbb{R})$ beweisen. Dies soll später geschehen.

2. Loeb-Maße

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra auf Ω, wenn $\Omega \in \mathcal{A}$ und $\Omega - A_1$, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Eine Abb. $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Inhalt auf $\mathcal{A}$, falls gilt

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ disjunkt} \Rightarrow \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Sei $\mu: \mathcal{A} \to \tilde{\mathbb{R}}$ intern und ein Inhalt.

Dann ist auch ${}^\circ\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto {}^\circ\mu(A) = \mathrm{st}(\mu(A))$ ein Inhalt. Denn sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt, so gilt

$${}^\circ\mu(A_1 \cup A_2) = \mathrm{st}(\mu(A_1 \cup A_2)) = \mathrm{st}(\mu(A_1) + \mu(A_2)) = {}^\circ\mu(A_1) + {}^\circ\mu(A_2)$$