

Natürlich müssen wir noch die Existenz der Abb. $\nu: V(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})$ beweisen. Dies soll später geschehen.

2. Lebes-Maße

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra ^{auf Ω} , wenn $\Omega \in \mathcal{O}$ und $\Omega - A_1, A_1 \cup A_2 \in \mathcal{O}$ für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{O}$.

Eine Abb. $\mu: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt Inhalt auf $\mathcal{O}$, falls gilt

$$A_1, A_2 \in \mathcal{O} \text{ disjunkt} \Rightarrow \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Sei $\mu: \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ intern und ein Inhalt.

Dann ist auch $\overset{\circ}{\mu}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\mu}(A) = \text{st}(\mu(A))$ $A \mapsto \overset{\circ}{\mu}(A) = \text{st}(\mu(A))$

ein Inhalt. Denn mal $A_1, A_2 \in \mathcal{O}$ disjunkt, so gilt

$$\overset{\circ}{\mu}(A_1 \cup A_2) = \text{st}(\mu(A_1 \cup A_2)) = \text{st}(\mu(A_1) + \mu(A_2)) = \overset{\circ}{\mu}(A_1) + \overset{\circ}{\mu}(A_2).$$

Lemma Sei A eine interne Menge und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A . Dann kann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu einer internen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A erweitert werden.

Beweis: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$B_k := \{ f: \mathbb{N} \rightarrow A \mid f(1) = a_1, \dots, f(k) = a_k \}$$

intern

Nach dem internen Definitionsprinzip ist jedes B_k intern. Außerdem erfüllt $\mathcal{L} = \{ B_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ die endliche Durchschnittseigenschaft.

Denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $a \in A$ gehört

$$f_k: \mathbb{N} \rightarrow A, \quad n \mapsto \begin{cases} a_n & \text{für } n \leq k \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

zu B_k . Somit ist $\bigcap \mathcal{L} \neq \emptyset$ aufgrund der Polysemität.

Jedes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ ist wie gewünscht.



Wir wollen im Folgenden μ zu einem Maß μ_L fortsetzen.

Sei also für $X \subseteq \Omega$

$$\underline{\mu}(X) = \sup \{ \mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, A \subseteq X \}$$

$$\bar{\mu}(X) = \inf \{ \mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, X \subseteq A \}$$

Definiere

$$L(\mathcal{A}) = \{ X \subseteq \Omega \mid \underline{\mu}(X) = \bar{\mu}(X) \} \stackrel{!}{=} \mathcal{A}$$

und

$$\mu_L(X) = \underline{\mu}(X) = \bar{\mu}(X) \text{ für alle } X \in L(\mathcal{A}).$$

Das so definierte $L(\mathcal{A})$ heißt Loeb-Algebra und μ_L das von μ erzeugte Loeb-Maß. Dies wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz (a) $L(\mathcal{A})$ ist eine σ -Algebra

(b) $\mu_L : L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Maß

Beweis: Sei $X \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt $A \subseteq X, A \in \mathcal{A}$ genau dann, wenn $\Omega - A \supseteq \Omega - X$ und $\Omega - A \in \mathcal{A}$. Also $\underline{\mu}(X) = \bar{\mu}(\Omega - X)$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n, B_n \in \mathcal{O}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend, $A_n \subseteq X \subseteq B_n$, $\mu(B_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Also $\mu(X) \geq \sup \{ \mu(A_n) \mid n \in \mathbb{N} \} = r$.

Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Fortsetzungen von $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in letzter Lemma. Nach einer früheren Lemma gilt also $r = \mu(A_N)$ für alle $N \in \mathbb{N}$. *

hinreichend kleinen, in finite $N \in \mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^m B_k - A_N\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^m (B_k - A_N)\right) \leq \sum_{k=0}^m \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon$$

~~Denn nach Lemma 1 ist auch $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend.~~

Daher gilt $B_k - A_N \subseteq B_k - A_k$, also $\mu(B_k - A_N) \leq \mu(B_k - A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Das gilt für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Überlappung gilt es also für alle kleinen $M \in \mathbb{N}$. Somit $\mu\left(\bigcup_{k=0}^M B_k - A_N\right) \leq 2\varepsilon$.

Aber $\mu(A_N) = r$. Daher $\mu\left(\bigcup_{k=0}^M B_k\right) \leq r + 2\varepsilon$.

Da nun $X \subseteq \bigcup_{k=0}^m B_k \in \mathcal{O}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war,

gilt $\bar{\mu}(X) \leq r$. Aus $\mu(X) \geq r \geq \bar{\mu}(X)$ folgt

$\mu(X) = \bar{\mu}(X) = r$. Also $X \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$. □

* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend.

(63)

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $L(\mathcal{O})$ unter Komplementen

abgeschlossen ist. Sei dazu $X \in L(\mathcal{O})$ mit $\mu(X) = r$.

Dann ex. $A_n, B_n \in \mathcal{O}$ mit $A_n \subseteq X \subseteq B_n$ ~~und~~ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = r. \quad \text{Somit gilt } \Omega - A_n \supseteq \Omega - X \supseteq \Omega - B_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega - A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(\Omega) - \mu(A_n)) = \mu(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) =$$

$$= \mu(\Omega) - r \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega - B_n) = \mu(\Omega) - r.$$

Nach Definition von $\underline{\mu}$ und $\bar{\mu}$ gilt außerdem

$$\bar{\mu}(\Omega - A_n) \geq \bar{\mu}(\Omega - X) \geq \bar{\mu}(\Omega - B_n)$$

$$\underline{\mu}(\Omega - A_n) \geq \underline{\mu}(\Omega - X) \geq \underline{\mu}(\Omega - B_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Aber } \bar{\mu}(\Omega - A_n) = \underline{\mu}(\Omega - A_n) = \mu(\Omega - A_n) \quad \text{und}$$

$$\bar{\mu}(\Omega - B_n) = \underline{\mu}(\Omega - B_n) = \mu(\Omega - B_n). \quad \text{Also } \bar{\mu}(\Omega - X) = \mu(\Omega) - r$$

$$\text{und } \underline{\mu}(\Omega - X) = \mu(\Omega) - r. \quad \text{Daher } \Omega - X \in L(\mathcal{O}).$$

Es bleibt die σ -Abgeschlossenheit von $L(\mathcal{O})$ und die σ -Additivität

von μ zu zeigen. Sei dazu $X_n \in L(\mathcal{O})$ o.E. aufsteigend mit $\mu(X_n) = r_n$.

Sei $X = \bigcup \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir wissen $X \in L(\mathcal{O})$ und $\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n =: r$.

zeigen. Nach Definition von $L(\mathcal{O})$ ex. für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ Folgen

Lemma Für alle $X \in L(\mathcal{O})$ ex. es $C \in \mathcal{O}$ mit

$$\mu_L(X \Delta C) = 0.$$

Beweis: Sei $X \in L(\mathcal{O})$. Dann ex. Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufsteigend

und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absteigend mit $A_n \subseteq X \subseteq B_n$ und $\mu(B_n - A_n) < \frac{1}{n}$.

Sei $A = \bigcup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \bigcap \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann hold

$A, B \in L(\mathcal{O})$ und es gilt $\mu_L(B - A) \leq \mu(B_n - A_n) < \frac{1}{n}$ für

alle $n \in \mathbb{N}$. Somit $\mu(B - A) = 0$. Sei $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{O} \mid A_n \subseteq C \subseteq B_n\}$.

$\mathcal{C}$ hat die endl. Durchschrittsbessehschaft. ^{Also} ~~Sei~~ $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Sei $C \in \bigcap \mathcal{C}$.

Dann ist $C \Delta X \subseteq B - A$. Also $\mu_L(C \Delta X) \leq \mu_L(B - A) = 0$. $\square$

Lemma Sei $N \in L(\mathcal{O})$ mit $\mu_L(N) = 0$ und $D \subseteq N$.

Dann gilt $D \in L(\mathcal{O})$, $\mu_L(D) = 0$.

Beweis: $0 \leq \underline{\mu}(D) \leq \bar{\mu}(D) \leq \bar{\mu}(N) = \mu_L(N) = 0$. $\square$

D.h. μ_L ist ein vollständiges Maß.

Wichtigstes Beispiel für die Loeb-Konstruktion ist die Konstruktion des Lebesgue-Maßes aus dem inneren Zahlmaß.

Sei weiterhin

$$\mathbb{T} = \left\{ 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N}{N} \right\}$$

wobei $N = K!$ für ein $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ sei. Aufgrund dieser Annahme ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{T}$.

Sei $X \subseteq \mathbb{T}$ intern. Dann bezeichne $\#(X)$ die interne Kardinalität von X , d.h. das endlich begrenzte $H \in {}^*\mathbb{N}$, so dass eine interne Bijektion $f: X \rightarrow H$ existiert.

Sei $\mathcal{O} = \{ X \subseteq \mathbb{T} \mid X \text{ intern} \} \neq \emptyset$.

Definiere auf $\mathcal{O}$ das interne Maß μ durch

$$\mu(X) = \frac{\#(X)}{\#(\mathbb{T})} = \#(X) \cdot \frac{1}{N}.$$

Dann ist $\mu: \mathcal{O} \rightarrow {}^*[0, 1]$ intern.

Satz

(a) $S \subseteq [0, 1]$ ist Lebesgue-messbar genau dann, wenn $st^{-1}[S]$ μ_L -messbar ist.

(b) $\lambda(S) = \mu_L(st^{-1}[S])$

Beweis:

(a) Sei zunächst $S = [a, b]$. Dann ist

$$st^{-1}[S] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right] \cap \mathbb{T} \right)}_{\in \mathcal{O}} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}).$$

Da nun aber

- die Borel- σ -Algebra die kleinste σ -Algebra ist, die alle Intervalle $S = [a, b]$ umfaßt
- $st^{-1}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} st^{-1}[X_n]$, $st^{-1}[[0, 1] - X] = \mathbb{T} - st^{-1}[X]$
- $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ eine σ -Algebra ist,

gilt $st^{-1}[S] \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ für alle Borel-Mengen $S \subseteq [0, 1]$.

Ist $S = [a, b]$, so ist

$$\mu_L(st^{-1}[S]) = \lim_{b \rightarrow \infty} \mu\left(\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{T}\right) = b - a = \lambda(S).$$

Also gilt für alle Borel-Mengen $S \subseteq [0, 1]$ auch $\lambda(S) = \mu_L(st^{-1}[S])$

(68)

Sei schließlich S eine beliebige Lebesgue-Maßbare Menge.

Dann ex. eine Borelmenge $B \subseteq S$ mit $\lambda(S-B) = 0$.

Daher ex. eine Borelmenge C mit $\lambda(C) = 0$ und $S-B \subseteq C$.

Da $st^{-1}[S] = \underbrace{st^{-1}[B]}_{\in L(\mathcal{O})} \cup st^{-1}[S-B]$ recht es also

$st^{-1}[S-B] \in L(\mathcal{O})$ zu zeigen. Aber $st^{-1}[S-B] \subseteq st^{-1}[C] \in L(\mathcal{O})$

und $\mu_L(st^{-1}[C]) = \lambda(C) = 0$. Da nach einer früheren

Lemma μ_L ein vollständiges Maß ist, ist also auch $st^{-1}[S-B] \in L(\mathcal{O})$.

Damit ist die eine Richtung von (2) bewiesen.

Sei nun umgekehrt $st^{-1}[S] \in L(\mathcal{O})$, z. B. $\mu_L(st^{-1}[S]) = r$.

Dann ex. interne $A_n \in \mathcal{O}$ mit $A_n \subseteq st^{-1}[S]$ und $\mu_L(\cancel{st^{-1}[S]} - A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = r$.

Da $A_n \subseteq st^{-1}[S]$, gilt $st[A_n] \subseteq S$. Nach einer früheren Lemma

sind die $st[A_n]$ abgeschlossen, also Lebesgue-Maßbar. mit

$$\lambda(st[A_n]) = \mu_L(st^{-1}[st[A_n]]) \geq \mu_L(A_n).$$

$$st^{-1}[st[A_n]] \supseteq A_n$$

Also hat S ~~ein~~^{internes} Lebesgue-Maß $\geq r$.

(69)

Wende nun das selbe Argument auf $[0, 1] - S$ an:

Da $st^{-1}[J] \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, ist $\pi - st^{-1}[J] = st^{-1}([0, 1] \setminus S) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$

mit $\mu_L(\pi - st^{-1}[J]) = 1 - r$. Das obige Argument liefert,
dass $[0, 1] - S$ inneres Lebesgue-Maß $\geq 1 - r$ hat.

Also hat S äußeres Lebesgue-Maß $\leq r$.

Somit ist S Lebesgue-Meßbar.

(b) folgt aus der Aussage für Intervalle durch Fortsetzen.



Im folgenden wollen wir die Meßbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen untersuchen. Dazu dient der Begriff des

Liftings (Hebung):

(1) Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Eine interne Funktion $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ heißt Lifting von f , wenn

$$F(\omega) = f(\omega) \quad \text{für } \mu_L\text{-f.a. } \omega \in \Omega \text{ gilt.}$$

(2) Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine interne Funktion $F: \Pi \rightarrow {}^*\mathbb{R}$

heißt Lifting von f , wenn

$${}^{\circ}F(t) = f({}^{\circ}t)$$

für μ -fast alle $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Lemma Sei $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein Lifting von $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

und $\Theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist ${}^*\Theta(F)$ ein Lifting

von $\Theta(f)$.

Beweis: Da F ein Lifting von f ist, gilt $F(\omega) \approx f(\omega)$

für μ -f.a. $\omega \in \Omega$. Da Θ stetig ist, also ${}^*\Theta(F(\omega)) \approx {}^*\Theta(f(\omega))$

für μ -f.a. $\omega \in \Omega$. $\square$

Sei zur Vereinfachung in Folgerungen

- $\mu(\Omega) = 1$
- Ω * -endlich
- $\mathcal{A} = \{X \subseteq \Omega \mid X \text{ intern}\}$.

(21)

Lemma Sei $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern. Dann ist ${}^\circ F$ μ_L -messbar.

Beweis: Sei $f = {}^\circ F$. Es reicht $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ für alle abgeschlossenen Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ zu zeigen. Aber

$$f^{-1}([a, b]) = \bigcap \{ f^{-1}([a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}]) \mid k \in \mathbb{N} \} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}).$$

□

Ähnlich: hat F, G intern, dann ist

$$\{ \omega \in \Omega \mid F(\omega) \neq G(\omega) \} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}).$$

Satz Es hat äquivalent:

(1) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist μ_L -messbar

(2) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hat en Lifting.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Sei $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ en Lifting.

Dann gilt ${}^\circ F(\omega) = f(\omega)$ für μ_L -f.a. $\omega \in \Omega$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Dann gilt für μ_L -fast alle $\omega \in \Omega$:

$$-\varepsilon < f(\omega) < \varepsilon \iff |{}^\circ F(\omega)| < \varepsilon$$

$$\iff |F(\omega)| < \varepsilon$$

$$\iff |F(\omega)| < \varepsilon - \frac{1}{k} \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Also $f^{-1}[J-\varepsilon, \varepsilon] \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| < \varepsilon - \frac{1}{n}\}$

ist μ -Maß 0. Aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| < \varepsilon - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Daher auch $f^{-1}[J-\varepsilon, \varepsilon] \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Der Beweis geht analog für alle Intervalle $J_{r-\varepsilon, r+\varepsilon}$.

Das reicht aber aus.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei f μ -messbar. Wir wollen ein inkreases

$F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ mit $F(\omega) \approx f(\omega)$ μ -f.s. finden. Sei oben

$\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, offene Basis für die Topologie

von $\mathbb{R}$. Seien $A_n = f^{-1}[B_n]$. Dann können wir noch

einen früheren Satz für alle A_n inkreases Mengen $A_{n,k}$

finden mit $A_{n,k} \subseteq A_{n,k+1} \subseteq A_n$ und

$$\mu(A_n - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k}) = 0.$$

Sei $A = \Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k})$. Dann gilt $\mu(A) = 1$.

Es reicht ein inkreases $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ mit

$$F[A_{n,k}] \subseteq {}^*B_n \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}$$

zu finden.

Denn dann gilt für alle $\omega \in A$

$$F(\omega) \in \bigcap \{ {}^*\mathcal{B}_n \mid f(\omega) \in \mathcal{B}_n \} = \tilde{f}(\omega),$$

d.h. $F(\omega) \approx f(\omega)$.

Sei dann für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_{n,m} = \{ F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R} \mid F \text{ intern, } F[A_{n,m}] \subseteq {}^*\mathcal{B}_n \}$$

Dann sind alle $\mathcal{F}_{n,m}$ intern und $\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N} \}$

hat die endl. Durchschnittseigenschaft. Denn: Seien n_1, n_2 und m_1, m_2 gegeben. Wir müssen $\mathcal{F}_{n_1, m_1} \cap \mathcal{F}_{n_2, m_2} \neq \emptyset$ zeigen.

Bzg. $\mathcal{B}_{n_1} \cap \mathcal{B}_{n_2} \neq \emptyset$. Dann wähle $a \in {}^*\mathbb{R}$ beliebig, ~~und~~ $x \in \mathcal{B}_{n_1} \cap \mathcal{B}_{n_2}$ und setze

$$F(\omega) = \begin{cases} x & \text{für } \omega \in A_{n_1, m_1} \cup A_{n_2, m_2} \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist ~~ist~~ andererseits $\mathcal{B}_{n_1} \cap \mathcal{B}_{n_2} = \emptyset$. Dann sind ~~ist auch~~ ~~A_{n_1, m_1}~~

~~ist~~ $A_{n_1, m_1} \cap A_{n_2, m_2} = \emptyset$. Wähle $x_1 \in \mathcal{B}_{n_1}$, $x_2 \in \mathcal{B}_{n_2}$, $a \in {}^*\mathbb{R}$ beliebig und setze

$$F(\omega) = \begin{cases} x_1 & \text{für } \omega \in A_{n_1, m_1} \\ x_2 & \text{für } \omega \in A_{n_2, m_2} \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

in beiden Fällen ist $f \in \mathcal{F}_{\mu_1, \mu_2} \cap \mathcal{F}_{\mu_2, \mu_1}$.

(74)

Also ex. hoch Polyschmiertheit ex $f \in \bigcap \mathcal{F}$. Dieses ist
wie gewohnt. $\square$

Satz $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-messbar,
wenn es ein Lfhlz $F: \mathbb{T} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ hat.

Beweis: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar

weiteres
 $\iff$ $f \circ \sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ μ_L -messbar
Satz

$\iff$ ex. Lfhlz $F: \mathbb{T} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ mit $f \circ \sigma = F$. $\square$

Für internes $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{A}$ setze

$$E_A[F] = \int_A F d\mu := \sum_{\omega \in A} F(\omega) \cdot \mu(\{\omega\}).$$

Eine interne Fkt. $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ heißt $\int$ -integrierbar, wenn

(i) $E[|F|] < M$ für ein $M \in \mathbb{N}$.

(ii) $E_A[|F|] \approx 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \approx 0$.

Wir werden zeigen:

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist μ_L -integrierbar

$\Leftrightarrow f$ hat ein S -integrierbares Lfkg $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu_L = {}^0 E_{\Omega}[F]$$

Im Spezialfall des inneren Zahlenkörpers und des Lebesgue-Integrals:

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar

$\Leftrightarrow f$ hat S -integrierbares Lfkg $F: {}^*\mathbb{T} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$

Dann gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = {}^0 \left(\sum_{t \in \mathbb{T}} F(t) \cdot \frac{1}{N+1} \right)$$

Wir sagen $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ ist S -beschränkt, wenn es $M \in \mathbb{N}$

mit $|F(\omega)| < M$ für alle $\omega \in \Omega$ existiert.

Lemma Sei $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern ~~meßbar~~ und $\int$ -beschränkt. Dann gilt:

(i) F ist $\int$ -integrierbar

(ii) ${}^o F$ ist Loeb-Leßbar und $E[F] \approx \int {}^o F d\mu.$

Beweis:

(i) Da F $\int$ -beschränkt ist, ex. es $M \in \mathbb{N}$ mit $|F| < M$. Da $\mu(\Omega) = 1$, gilt also

$$E_{\Omega}[|F|] \leq 1 \cdot M. \text{ Und ist } \mu(A) \approx 0, \text{ so}$$

$$\text{gilt } E_A[|F|] \leq \mu(A) \cdot M \approx 0.$$

(ii) Sei o.E. $0 \leq F(\omega) \leq 1$ für alle $\omega \in \Omega$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k < n$ sei

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{k}{n} \leq F(\omega) < \frac{k+1}{n} \right\} = F^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right).$$

Definiere $F_1^n, F_2^n: \Omega \rightarrow {}^*[0, 1]$ durch

$$F_1^n(\omega) = \frac{k}{n}, \quad F_2^n(\omega) = \frac{k+1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \in A_n.$$

Also gilt

$$F_1^n \leq F \leq F_2^n \quad \text{und} \quad 0 \leq F_2^n - F_1^n \leq \frac{1}{n}.$$

(77)

Somit ${}^0F_1^h \leq {}^0F \leq {}^0F_2^h$, und $|{}^0F_1^h - {}^0F_2^h| \leq \frac{1}{h} \rightarrow 0$.

Nun sind aber nach einer früheren Lemmae ${}^0F_1^h$ und

${}^0F_2^h$ μ_L -Leßbare einfache Funktionen. Also ist

0F μ_L -integrierbar mit $\int {}^0F d\mu_L = \lim_{h \rightarrow \infty} \int {}^0F_1^h d\mu_L$.

Andererseits ist ${}^0E[F_1^h] \leq {}^0E[F] \leq {}^0E[F_2^h]$ und

$$|{}^0E[F_2^h] - {}^0E[F_1^h]| \leq \frac{1}{h} \rightarrow 0.$$

$$\text{Also: } {}^0E[F] = \lim_{h \rightarrow \infty} {}^0E[F_1^h].$$

Es reicht also ${}^0E[F_1^h] = \int {}^0F_1^h d\mu_L$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} {}^0E[F_1^h] &= {}^0\left(\sum_{0 \leq k < h} \frac{k}{h} \mu(A_k)\right) \\ &= \sum_{0 \leq k < h} \frac{k}{h} \mu(A_k) = \int {}^0F_1^h d\mu_L. \end{aligned}$$

□

Lemma

(78)

Sei $f: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern ~~und μ -messbar~~. Dann ist f S -integrierbar genau dann, wenn für alle $r \approx \infty$

$$\mathbb{E} \{ |f| > r \} [|f|] \approx 0.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $r^{>0}$ infinit. Ang. $\mu(\{ |f| > r \}) \neq 0$.

Dann ist $\mu(\{ |f| > r \}) \cdot r \leq \mathbb{E} [|f|]$ infinit. Das widerspricht (i) in der Definition von S -Integrierbarkeit.

Also ist $\mu(\{ |f| > r \}) \approx 0$. Dann gilt aber $\mathbb{E} \{ |f| > r \} [|f|] \approx 0$ nach (ii) in der Definition von S -Integrierbarkeit.

$\Leftarrow$: Sei $f_H := f \wedge \{ |f| \leq H \}$. Dann gilt

$$\mathbb{E} [|f|] = \mathbb{E} [|f_H|] + \mathbb{E} \{ |f| > H \} [|f|].$$

Nach Voraussetzung also $\mathbb{E} [|f|] \approx \mathbb{E} [|f_H|]$ für alle infiniten $H > 0$. Aber $\mathbb{E} [|f_H|] \leq H$. Da dies für alle infiniten $H > 0$ gilt, also $\mathbb{E} [|f|] < \infty$.

Damit ist (i) aus der Definition von S -Integrierbarkeit gezeigt.

Für (i) sei $\mu(A) \approx 0$, $A \in \mathcal{A}$. Wie oben gilt

$$E_A[|F|] = E[|F| \cdot 1_A] \approx E[|F_n| \cdot 1_A]$$

für alle $n \approx \infty$. Also $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ E[|F_n| \cdot 1_A] = {}^\circ E_A[|F|]$.

Nun ist aber $|F_n|$ nach dem letzten Lemma S -integrierbar.

Also gilt ${}^\circ E[|F_n| \cdot 1_A] = {}^\circ E_A[|F_n|] = 0$. Somit

auch ${}^\circ E_A[|F|] = 0$.

□

Korollar Sei $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern ~~und μ -messbar~~. Sei

$F_n = F \cdot 1_{\{|F| \leq n\}}$. Dann ist F S -integrierbar genau

dann, wenn ${}^\circ E[|F - F_n|] \rightarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: $E[|F - F_n|] = E_{\{|F| > n\}}[|F|]$. Also gilt

${}^\circ E[|F - F_n|] \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn

~~E~~ $E_{\{|F| > r\}}[|F|] \approx 0$ für alle $r \approx \infty$ gilt. D.h.

das Korollar folgt direkt aus dem Lemma.

□

Korollar

Sei $f: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern ~~fast~~ ~~beschränkt~~. Dann ist f genau dann S -integrierbar, wenn es S -integrierbare Funktionen $f_n: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ gibt mit ${}^oE[|f - f_n|] \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis: " $\Rightarrow$ " folgt aus dem letzten Korollar und der vorletzten Lemma.

" $\Leftarrow$ ": Sei $r \approx \infty$. Dann gilt

$$E_{\{|f| > r\}}[|f|] \leq E_{\{|f| > r\}}[|f_n|] + E[|f - f_n|]$$

$$\approx 0 \qquad \longrightarrow 0$$

Aber ~~da~~ $E_{\{|f| > r\}}[|f_n|] \approx 0$, da f_n S -integrierbar.

Also $E_{\{|f| > r\}}[|f|] \approx 0$ und die Aussage folgt aus dem letzten Lemma.

□

Satz ~~Sei~~ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann μ -integrierbar,
wenn es ein $\mathcal{S}$ -integrierbares Lift F hat.

Dann gilt

$$E_A[F] \approx \int_A f \, d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Sei zunächst $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\mathcal{S}$ -integrierbares Lift
von $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt wie in letzter Lemma und
dessen Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E[F] = E[F_n] + E_{\{|F| > n\}}[F] \approx E[F_n]$$

Also $\lim_{n \rightarrow \infty} E[F_n] = E[F] < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist aber

F_n $\mathcal{S}$ -beschränkt. Daher gilt $E[F_n] = \int F_n \, d\mu$ nach
einem früheren Lemma. Somit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n \, d\mu = E[F] < \infty$

Nun konvergiert F_n aber fast überall punktweise gegen f ,
da F ein Lift von f ist. Also ist f μ -integrierbar

mit $\int f \, d\mu \approx E[F]$.

Ist $A \in \mathcal{A}$, so ersetze F durch $F \cdot 1_A$ und argumentiere
analog. Das liefert $E_A[F] \approx \int_A f \, d\mu$.

Sei umgekehrt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μ_L -integrierbar. Wähle nach
früherem Satz ein Lifting $F: \Omega \rightarrow {}^s\mathbb{R}$ von f . Für HGW

Sei $F_H = F \cdot \mathbb{1}_{\{|F| \leq H\}}$. Für HGW sei $f_H = f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \leq H\}}$.

Da $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μ_L -integrierbar ist gilt

$$\lim_{n, n' \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f_{n'}| d\mu_L = 0. \quad \text{Da } |F_n - F_{n'}| \text{ } S\text{-beschränkt}$$

ist, gilt nach früherer Lemma $E[|F_n - F_{n'}|] \approx$

$$\approx \int_{\Omega} |\circ F_n - \circ F_{n'}| d\mu_L = \int_{\Omega} |f_n - f_{n'}| d\mu_L. \quad \text{Denn}$$

$$|\circ F_n - \circ F_{n'}| = |f_n - f_{n'}| \quad \mu_L\text{-fast überall.}$$

Somit gilt $\lim_{n, n' \rightarrow \infty} {}^\circ E[|F_n - F_{n'}|] = 0$.

Also gilt für alle hinreichend kleinen $K \approx \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ E[|F_K - F_n|] = 0.$$

Nach dem letzten Korollar ist also F_K S -integrierbar.

Außerdem ex. ein $AEL(\mathcal{O})$ mit $\mu_L(A) = 1$ und $f(\omega) = {}^\circ F(\omega)$

für alle $\omega \in A$. Also auch $f(\omega) = {}^\circ F_K(\omega)$ für alle $\omega \in A$.

Somit ist F_K ein S -integrierbares Lifting von f .

