3. Anwendungen in der Stochastik

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein W-Raum. Dann heißt $b : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung, wenn gilt:

(i) $b(\cdot, t)$ ist μ-meßbar für alle $t \in [0,1]$

(ii) $\mu(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, 0) = 0\}) = 1$

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega,t) - b(\omega,s) \in A\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (t-s)}} \cdot \int_A e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t-s}}\right)^2} dx$$

für alle $0 \leq s < t \leq 1$ und $A \in Leb(\mathbb{R})$.

(iii) Seien $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq 1$ und $A_1, \ldots, A_n \in Leb(\mathbb{R})$.

Dann gilt

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, t_{i+1}) - b(\omega, t_i) \in A_i \text{ für alle } 0 \leq i \leq n\})$$
$$= \prod_{i=0}^{n} \mu(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, t_{i+1}) - b(\omega, t_i) \in A_i\}).$$

(iv) $b(\omega, \cdot)$ ist stetig für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.

Frage: Gibt es $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, so dass eine Brownsche Bewegung existiert.

Wir werden im Folgenden ein geeignetes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und $b : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit konstruktiven Methoden konstruieren.

Sei dazu $\mathbb{T} = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\}$ wie zuvor,

$$\Omega = \{\omega : \mathbb{T} \to \{-1, 1\} \mid \omega \text{ intern}\},$$

$$\mathfrak{A} = \{X \subseteq \Omega \mid X \text{ intern}\},$$

$$\mu(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Sei $B : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ die folgende $*$-endliche Irrfahrt:

$$B(\omega, t) = \sum_{0}^{t} \omega(s)\sqrt{\frac{1}{N}} = \omega(0)\cdot\sqrt{\frac{1}{N}} + \omega\left(\frac{1}{N}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{N}} + \omega\left(\frac{2}{N}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{N}} + \dots + \underline{\omega\left(t - \frac{1}{N}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{N}}}\ !!$$

Dadurch wird ein Teilchen beschrieben, das sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den Zeitpunkten t_0 und $t_0 + \frac{1}{N}$ um die Strecke $\sqrt{\frac{1}{N}}$ nach links oder nach rechts bewegt.

Wir werden zeigen, dass für μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$

$B(\omega,\cdot)$ S-stetig ist. Definiere für diese $b: \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$

durch

$$b(\omega, {}^\circ t) = {}^\circ B(\omega, t).$$

Für die übrigen $\omega \in \Omega$ definiere $b(\omega, t)$ beliebig.

Dann ist $b: \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung

bezüglich $(\Omega, L(\mathcal{O}), \mu_L)$. Für (iii) in der Definition

der Brownschen Bewegung benutzen wir den Begriff der

S-Unabhängigkeit.

Seien $F_i : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ intern, $i \in I$. Wir sagen die F_i mit $i \in I$

seien S-unabhängig, wenn für jeweils endlich viele $i_1, \dots, i_n$ und

alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid F_{i_1}(\omega) < x_1, \dots, F_{i_n}(\omega) < x_{i_n}\})$$

$$\simeq \prod_{k=1}^{n} \mu(\{\omega \in \Omega \mid F_{i_k}(\omega) < x_{i_k}\}).$$

Lemma Seien $F_i : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ mit $i \in I$ S-unabhängig. Dann sind ${}^\circ F_i$, $i \in I$, unabhängig bezüglich $(\Omega, L(\mathcal{A}), \mu_L)$.

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\mu_L(\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ F_{i_1}(\omega) < x_1, \dots, {}^\circ F_{i_m}(\omega) < x_m\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} {}^\circ\mu(\{\omega \in \Omega \mid F_{i_1}(\omega) < x_1 - \tfrac{1}{n}, \dots, F_{i_m}(\omega) < x_m - \tfrac{1}{n}\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} {}^\circ\Big(\prod_{k=1}^{m} \mu(\{\omega \in \Omega \mid F_{i_k}(\omega) < x_k - \tfrac{1}{n}\})\Big)$$

$$= \cancel{\lim_{n\to\infty}} \prod_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} {}^\circ\mu(\{\omega \in \Omega \mid F_{i_k}(\omega) < x_k - \tfrac{1}{n}\})$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \mu_L(\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ F_{i_k}(\omega) < x_k\}).$$

$\blacksquare$

Für (ii) 2. der Definition der Brownschen Bewegung benutzen wir Doppelfolgen und den zentralen Grenzwertsatz:

~~Satz~~ **Lemma**

Sei $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge. Dann gilt ${}^*a_{n,m} \approx a$ für alle $n,m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$ ist. Dabei ist $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$ definiert durch: $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ \; \exists N\in\mathbb{N}$ $\forall m,n > N: \; | a_{n,m} - a | < \varepsilon$.

Beweis: Übung. ☑

Satz Seien $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit identischer Verteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Dann konvergiert für alle $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\mu\Big(\Big\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} F_k(\omega) \le \alpha\Big\}\Big)$$

gegen

$$\Phi(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Wir wenden den Zentralen Grenzwertsatz für $\Omega_{\mathbb N} = \{-1, 1\}^{\mathbb N}$ mit dem Produktmaß $\mu_{\mathbb N}$ der normierten Zählmaße auf $\{-1, 1\}$ an. Für $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb N$ sei $F_n(\omega) = \omega(n)$.

Dann ist $\mathbb E[F_t] = 0$ und $Var(F_t) = \mathbb E[F_t^2] = 1$.

Außerdem ist für alle $\alpha \in \mathbb R$ und $n, m \in \mathbb N$

$$\mu_{\mathbb N}(\{\omega \in \Omega_{\mathbb N} \mid F_n(\omega) \leq \alpha\}) = \mu_{\mathbb N}(\{\omega \in \Omega_{\mathbb N} \mid F_m(\omega) \leq \alpha\}).$$

Also gilt für alle $\alpha \in \mathbb R$

$$\lim_{n \to \infty} \mu_{\mathbb N}\left(\left\{\omega \in \Omega_{\mathbb N} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt n} \sum_{k=1}^{n} F_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right) = \Phi(\alpha)$$

Betrachte nun die normierten Zählmaße μ_n auf $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$.

Dann gilt
$$\mu_{\mathbb N}\left(\left\{\omega \in \Omega_{\mathbb N} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt n} \sum_{k=1}^{n} F_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right)$$
$$= \mu_m\left(\left\{\omega \in \Omega_m \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt n} \sum_{k=1}^{n} F_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right)$$

für alle $n \leq m \in \mathbb N$.

Also $\lim\limits_{n \leq m \to \infty} \mu_m\left(\left\{\omega \in \Omega_m \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt n} \sum\limits_{n=1}^{n} F_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right) = \Phi(\alpha)$

Somit nach Lemma

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \mu}}{\mu_{N+1}}\left(\left\{\omega \in \underset{\substack{\shortparallel \\ \Omega}}{\Omega_{N+1}} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt H} \sum_{k=1}^{H} \omega\Big(\overset{\substack{\frac{k}{N} \\ \shortparallel}}{\tfrac{k}{\cancel{\ }}}\Big) \leq \alpha\right\}\right) \approx \Phi(\alpha)$$

für alle $H \in {}^*\mathbb N - \mathbb N$, $H \leq N$.

Nun können wir zeigen:

Satz: $b : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ist eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\Omega, L(\mathcal{O}), \mu_L)$.

Beweis:

(i): Nach einem früheren Lemma ist für interne $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ die Funktion ${}^\circ F : \Omega \to \mathbb{R}$ μ_L-meßbar.

(ii):
$$\mu_L(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, {}^\circ t) - b(\omega, {}^\circ s) \le \alpha\})$$
$$= \mu_L(\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ B(\omega, t) - {}^\circ B(\omega, s) \le \alpha\})$$
$$= \mu_L\left(\left\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s^t \omega_n\right) \le \alpha\right\}\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} {}^\circ\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sum_s^t \omega_n \frac{1}{\sqrt{N}} \le \alpha + \frac{1}{n}\right\}\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} {}^\circ\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=1}^{H} \omega_{i_k} \le \frac{\alpha + \frac{1}{n}}{\sqrt{{}^\circ t - {}^\circ s}}\right\}\right)$$

wobei $t - s = H \cdot \frac{1}{N}$ sei und i_k die Zufallsvariablen "zwischen" s und t durchnumeriere.

Nach unserer Vorbemerkung zum zentralen Grenzwertsatz

gilt also

$$\mu_L(\{\omega\in\Omega \mid b(\omega,{}^\circ t) - b(\omega,{}^\circ s) \le \alpha\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{\alpha+\frac{1}{n}}{\sqrt{{}^\circ t-{}^\circ s}}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{{}^\circ t-{}^\circ s}}\right).$$

Aber

$$\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t-s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{\sqrt{t-s}}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{t-s}\right)^2}\,dy$$

$$x = \frac{y}{\sqrt{t-s}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{t-s}}$$

(iii): Folgt unmittelbar aus vorangegangenem Lemma.

(iv): Zunächst zwei einfache Rechnungen: Sei $\Delta B(t) = B(t+\frac{1}{N}) - B(t)$.

Dann gilt $\Delta B(t)^2 = \frac{1}{N}$. Also

$$\mathbb{E}[B(t)^2] = \mathbb{E}\Big[B(t)^2 - B(t-\tfrac{1}{N})^2 + B(t+\tfrac{1}{N})^2 - B(t-\tfrac{2}{N})^2$$

$$+ B(t-\tfrac{2}{N}) - \dots\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{s=0}^{t} (B(s)+\Delta B(s))^2 - B(s)^2)\Big] =$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}\left[2\, B(s)\, \Delta B(s) + \overset{\frac{1}{N}}{\cancel{\Delta t}} \right] = \sum_{s=0}^{t} \frac{1}{N} = t,$$

wobei $\mathbb{E}[B(s)\, \Delta B(s)] = 0$, da $\Delta B(s) = \pm \sqrt{\frac{1}{N}}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ unabhängig von $B(s)$.

$$\mathbb{E}[B(t)^4] = \mathbb{E}\left[\sum_{s=0}^{t} \left((B(s) + \Delta B(s))^4 - B(s)^4 \right) \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}\Big[4\, B(s)^3\, \Delta B(s) + 6\, B(s)^2\, \Delta B(s)^2 +$$

$$+ 4\, B(s)\, \Delta B(s)^3 + \Delta B(s)^4 \Big] =$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \mathbb{E}\left[6\, B(s)^2 \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \right] = \sum_{s=0}^{t} \left(6s \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \right) =$$

$$= 3\, t \left(t - \frac{1}{N} \right) + t \frac{1}{N^2} = 3t^2 - 2t \frac{1}{N^2} \leq 3t^2 .$$

Genauso gilt:

$$\mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^4 \right] \leq 3 (t-s)^2 .$$

Definiere nun

$$\Omega_{m,n} = \{ \omega \in \Omega \mid \exists i < n \ \exists s \in \mathbb{T}_n \ ] \tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] :$$

$$| B(\omega, s) - B(\omega, \tfrac{i}{n}) | \geq \tfrac{1}{m} \} .$$

Dann gilt, dass $B(\omega, \cdot)$ nicht $\mathcal{S}$-stetig ist, genau dann, wenn $\omega \in \bigcup_m \bigcap_n \Omega_{m,n}$. Also reicht es zu zeigen, dass ${}^\circ\mu(\Omega_{m,n}) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ und alle $m \in \mathbb{N}$. Denn dann ist $\bigcap_n \Omega_{m,n}$ eine Nullmenge und damit auch $\bigcup_m \bigcap_n \Omega_{m,n}$.

Es gilt:

$$\mu(\Omega_{m,n}) \leq \sum_{i<n} \mu(\{ \omega \in \Omega \mid \exists s \in \mathbb{T}_n \ ] \tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] : | B(\omega, s) - B(\omega, \tfrac{i}{n}) | \geq \tfrac{1}{m} \})$$

$$\leq 2 \sum_{i<n} \mu(\{ \omega \in \Omega \mid | B(\omega, \tfrac{i+1}{n}) - B(\omega, \tfrac{i}{n}) | \geq \tfrac{1}{m} \})$$

Denn:

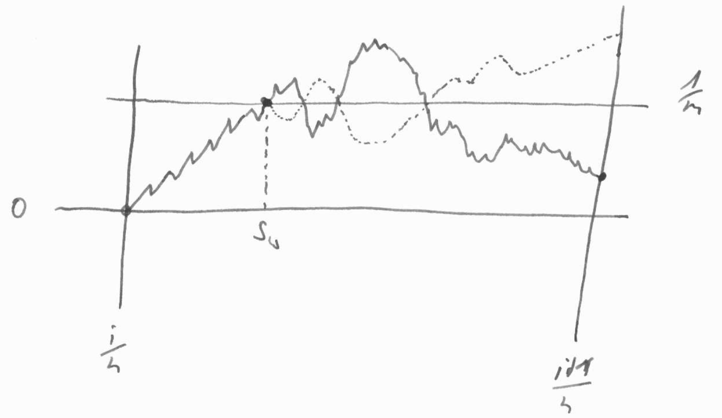
$$\{\omega\in\Omega \mid \exists s\in \mathbb{T}\cap \left]\tfrac{i}{n},\tfrac{i+1}{n}\right] : |B(\omega,\tfrac{s}{n}) - B(\omega,\tfrac{i}{n})| \ge \tfrac{1}{n}\}$$

$$= \{\omega\in\Omega \mid |B(\omega,\tfrac{i+1}{n}) - B(\omega,\tfrac{i}{n})| \ge \tfrac{1}{n}\} \cup$$

$$\cup \Big(\{\omega\in\Omega \mid \exists s\in\mathbb{T}\cap \left]\tfrac{i}{n},\tfrac{i+1}{n}\right[: |B(\omega,\tfrac{s}{n})-B(\omega,\tfrac{i}{n})|\ge \tfrac{1}{n}\}$$

$$- \{\omega\in\Omega \mid |B(\omega,\tfrac{i+1}{n})-B(\omega,\tfrac{i}{n})|\ge\tfrac{1}{n}\}\Big).$$

Sei nun ω aus der zweiten Menge, d.h. $|B(\omega,\frac{i+1}{n}) - B(\omega,\frac{i}{n})| < \frac{1}{n}$ aber $|B(\omega,s) - B(\omega,\frac{i}{n})| \ge \frac{1}{n}$ für ein $s\in\mathbb{T}\cap \left]\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right[$.



Sei s_ω das kleinste solche s. Definiere $\omega'\in\Omega$ durch $\omega'(t) = \omega(t)$ für $t < s_\omega$ und $\omega'(t) = -\omega(t)$ für $t \ge s_\omega$. Dann ist $|B(\omega',\frac{i+1}{n}) - B(\omega',\frac{i}{n})| \ge \frac{1}{n}$.

Da aber jedes ω' genau einem $\omega \in \Omega$ entspricht, gilt die obige Ungleichung.

Insgesamt gilt

$$\mu(\Omega_{m,n}) \leq 2 \sum_{i \leq n} \mu\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \left|B\left(\omega, \tfrac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega, \tfrac{i}{n}\right)\right| \geq \tfrac{1}{m}\right\}\right)$$

$$\leq 2 m^4 \sum_{i \leq n} \mathbb{E}\left[\left|B\left(\omega, \tfrac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega, \tfrac{i}{n}\right)\right|^4\right]$$

$$\leq 6 m^4 \sum_{i \leq n} \frac{1}{n^2} = \frac{6 m^4}{n} \longrightarrow 0 .$$

Ungleichung von Tschebyscheff.

$\square$

Lemma

Sei $(a_{n,m})_{n,m \in {}^*\mathbb{N}}$ eine interne Doppelfolge. Dann gilt $\lim\limits_{n,m\to\infty} {}^\circ a_{n,m} = a$, genau dann, wenn $a_{N,M} \approx a$ für alle hinreichend kleinen $N, M \approx \infty$ gilt.

Beweis: Übung. $\square$

Lemma

Setze $b(\omega, .) = 0$ falls $B(\omega, .)$ nicht S-stetig ist. Dann ist $\{ b(\omega, .) \mid \omega \in \Omega \}$ Cauchy-vollständig bzgl. der Supremumsnorm.

Beweis: Sei $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Ω mit $\lim\limits_{n,m\to\infty} {}^\circ \max_{t \in T} | B_t(\omega_n) - B_t(\omega_m) | = 0$. Setze $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer internen Folge $(\omega_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ fort. Dann gilt $\max_{t \in T} | B_t(\omega_N) - B_t(\omega_M) | \approx 0$ für alle hinreichend kleinen $N, M \approx 0$. Also $\lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ \max_{t \in T} | B_t(\omega_n) - B_t(\omega_M) | = 0$. $\square$

Lemma

Sei $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0)=0$.

Dann ex. ein $\omega \in \Omega$ mit $b(\omega, .) = f$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sei $f_{x_1, \ldots, x_n}$ die Funktion $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die aus $\frac{i}{n} \longmapsto a_i$ durch lineare Interpolation entsteht. Aufgrund des letzten Lemmas reicht es zu zeigen, dass diese Funktionen von der Form $b(\omega, .)$ sind. Aber da ein einzelner Schritt in der $*$-endlichen Irrfahrt Steigung

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{N}}}{\frac{1}{N}} = \sqrt{N} \approx \infty$$

hat, kann man leicht ein solches ω finden. $\boxtimes$

Definiere auf $C[0,1]$ eine σ-Algebra $\mathfrak{L}$ durch

$$X \in \mathfrak{L} \iff \{\omega \in \Omega \mid b(\omega, .) \in X\} \in L(\mathfrak{A})$$

und ein Maß W durch

$$W(X) = \mu_L(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, .) \in X\}).$$

Der so entstehende Maßraum $(C[0,1], \mathfrak{L}, W)$ ist die Vervollständigung des Wiener-Raums.

Im Folgenden wollen wir uns mit stochastischen Prozessen beschäftigen.

Sei weiterhin

- Ω *-endlich
- $\mathfrak{A} = \{X \subseteq \Omega \mid X \text{ intern}\}$
- $\mu : \mathfrak{A} \to {}^*[0,1]$ ein interner Inhalt.

Eine interne Abb. $X : \Omega \times \mathbb{T} \to M$ in eine Menge M heißt interner stochastischer Prozeß. Aufgrund unserer Annahme über $\mathfrak{A}$ brauchen wir keine Meßbarkeitsbedingung.

Sei

$$\Delta X(\omega, t) = X(\omega, t + \tfrac{1}{N}) - X(\omega, t)$$

und

$$\sum_{r=s}^{t} X(\omega, r) = X(\omega, s) + \dots + X(\omega, t - \tfrac{1}{N}).$$

Sind $X, Y : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ zwei interne Prozesse, so heißt der durch

$$\left(\int X \, dY\right)(\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} X(\omega, s) \, \Delta Y(\omega, s)$$

definierte Prozess das stochastische Integral von X bezüglich Y.

Wir schreiben $\int_0^t X \, dY$ für $\left(\int X \, dY\right)(\cdot \, , t)$.

Natürlich ist diese Definition nur dann nützlich, wenn fast alle Pfade von $\int X \, dY$ S-stetig sind. Dazu muß man Einschränkungen an X und Y machen. Im wesentlichen muß X nicht-antizipierend und Y ein Martingal sein.

~~Ist $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{T}$~~ Ein interner Prozeß $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ heißt nicht-antizipierend, wenn für alle $\omega, \omega' \in \Omega$ mit $\omega \upharpoonright t = \omega' \upharpoonright t$ auch $X(\omega, t) = X(\omega', t)$ gilt. Der Wert von $X(\omega, t)$ hängt also nicht vom Verlauf von ω nach t ab.

Ein Beispiel für ein internes Martingal ist die interne Brownsche Bewegung $B : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$.

<u>Beobachtung</u>: Sei $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ intern, nicht-antizipierend und $\mathbb{E}_{\Omega \times \mathbb{T}}[X^2] < \infty$. Dann ist ~~F~~

$$\mu_L(\underbrace{\{\omega \in \Omega \mid \int_0^t X \, dB < \infty\}}_{= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{\int_0^t X \, dB < n\}}_{\in \mathcal{A}}}) = \cancel{0} \; 1$$

für alle $t \in \mathbb{T}$.

Denn

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X\, dB\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_0^t X\, \Delta B\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{s=0}^t X(s)^2\, \Delta B(s)^2\right]$$

$$+ \; 2 \sum_{r<s} \underbrace{\mathbb{E}\left[X(s)\, X(r)\, \Delta B(s)\, \Delta B(r)\right]}_{=0}$$

$=0$, da $\Delta B = \pm\sqrt{\frac{1}{N}}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und X nicht-antizipierend

Außerdem $\Delta B(s)^2 = \frac{1}{N}$.

Also $$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X\, dB\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{s=0}^t X^2 \overset{\frac{1}{N}}{\cancel{\Delta B^2}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}_{\Omega \times (\mathbb{T} \cap [0,t[)}\left[X^2\right]$$

$$\leq \mathbb{E}_{\Omega \times \mathbb{T}}\left[X^2\right] < \infty$$

Für eine standard Entsprechung von nicht-antizipierend benutzen wir eine interne Filtration.

Für $t \in \mathbb{T}$ sei $\mathfrak{A}_t$ die interne Algebra auf Ω, die von den Mengen

$$[\omega]_t = \{\omega' \in \Omega \mid \omega' \upharpoonright t = \omega \upharpoonright t\}$$

erzeugt werden.

Sei $\mathfrak{N}$ die Menge der μ_L-Nullmengen in Ω.

Für $t \in [0,1]$ definiere

$$\mathcal{L}_t = \sigma\Big(\bigcup_{s \approx t} L(\mathfrak{A}_s) \cup \mathfrak{N} \Big)$$

σ-Algebra erzeugt von ...

Ein standard Prozeß $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt meßbar, wenn er bezüglich der ~~Vervollständigung~~ Vervollständigung des Produkts des Loeb-Maßes auf Ω und des Lebesgue-Maßes auf $[0,1]$ meßbar ist.

Wir sagen x sei adaptiert [bzgl. der Filtration ~~$(\Omega$~~

$(\Omega, \{\mathcal{B}_t \mid t \in [0,1]\}, L(\mu))$], wenn x meßbar ist

und alle $x(\cdot, t)$ $\mathcal{L}_t$-meßbar sind.

Sei $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Ein interner stochastischer

Prozeß $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ heißt ein Lifting von x,

wenn

$$ {}^\circ X(\omega, t) = x(\omega, {}^\circ t) $$

für fast alle (ω, t) gilt. Dabei bezieht sich "fast

alle" auf das Loeb-Maß des internen Zählmaßes auf

$\Omega \times \mathbb{T}$.

Ein stochastischer Prozeß $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt

fast sicher adaptiert, falls ein adaptiertes $y : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$

ex., so dass $x(\omega, s) = y(\omega, s)$ für fast alle (ω, s) gilt.

Satz

Ein stochastischer Prozeß $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ist genau dann fast sicher adaptiert, wenn er ein nicht-antizipierendes Lifting besitzt.

Ist x quadrat-integrierbar bzgl. $\mu_L \times Leb$, so kann man ein X wählen, so dass X^2 S-integrierbar bzgl. des internen Zählmaßes auf $\Omega \times \mathbb{T}$ ist.

Satz

Sei x quadrat-integrierbar und adaptiert. Sei X ein nicht-antizipierendes, ~~L~~ quadrat-S-integrierbares Lifting von x. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{T}$ und μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$

$$\int_0^{°t} x(\omega, s)\, db = {}^{\circ}\left(\int_0^t X(\omega, s)\, dB \right).$$

standard Ito-Integral

Wesentlich für diesen Satz ist natürlich, dass $\int X\, dB$ für μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$ S-stetig ist. Dafür braucht man Martingal-Theorie.

Eine interne Filtration auf Ω ist ein Tupel $(\Omega, (\mathfrak{A}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mu)$, wobei $(\mathfrak{A}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ eine monoton wachsende interne Folge interner Algebren auf Ω ist.

Ein interner Prozeß $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ heißt $*$-adaptiert [bzgl. $(\Omega, (\mathfrak{A}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mu)$], falls $X(\cdot, t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$ $\mathfrak{A}_t$-meßbar ist.

Ein interner Prozeß $M : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ heißt Martingal [bzgl. $(\Omega, (\mathfrak{A}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mu)$], wenn gilt:

(i) M ist $*$-adaptiert

(ii) Für alle $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s < t$ und alle $A \in \mathfrak{A}_s$

ist $$\mathbb{E}\left[1_A \left(\underset{\substack{\| \\ M(\cdot,s)}}{M_s} - M_t \right) \right] = 0.$$

≤ 0 :⟺ Submartingal

Sei $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ ein interner Prozeß. Der Prozeß $[X] : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ definiert durch

$$[X](\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} (\Delta X(\omega, s))^2$$

heißt quadratische Variation von X.

Satz

Sei $M: \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ ein internes Martingal mit $\mathbb{E}[M(\cdot, 1)^2] < \infty$. Dann ist $[M]$ genau dann S-stetig μ_L-fast überall, wenn M S-stetig ist μ_L-fast überall.

Der Beweis verwendet die Doob- und Burkholder-Gundy-Davis-Ungleichungen aus der standard Stochastik.

Sei für diese Ungleichungen $T = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Satz (Doob-Ungleichung)

Sei $M: \Omega \times T \to \mathbb{R}_0^+$ ein Submartingal, $p > 1$ und $M(\cdot, 1) \in L^p$. Dann gilt

$$\left\| \max_{t \in T} M_t \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \left\| M(\cdot, 1) \right\|_p .$$

<u>Satz</u> (Burkholder-Gundy-Davis-Ungleichungen)

Sei $M : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ein Martingal, $p \in [1, \infty[$ und $M(\cdot, 1) \in \mathcal{L}^p$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\sqrt{2} \cdot p} \left(\mathbb{E}\left[\max_{t \in \mathbb{T}} |M_t|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\mathbb{E}\left[[M](\cdot, 1)^{\frac{p}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 48\, p \left(\mathbb{E}\left[\max_{t \in \mathbb{T}} |M_t|^p \right] \right)^{1/p}.$$

<u>Dabei</u> heißt ein stochastischer Prozeß ~~f~~ $M : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $[M_t$ meßbar für alle $t \in \mathbb{T}]$ p-integrierbar, wenn $M_t \in \mathcal{L}^p$ für alle $t \in \mathbb{T}$ ist.

Ein Prozeß $M : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ heißt $(\mathfrak{A}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-Martingal, wenn

(1) M ist $(\mathfrak{A}_t)_{t \in \mathbb{T}}$-adaptiert

(2) M ist 1-integrierbar

(3) $\mathbb{E}\, 1_A (M_t - M_s) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}_s$

und $s < t \in \mathbb{T}$.

Zu Beginn des Abschnitts haben wir gezeigt, dass $B(\omega, .)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ S-stetig ist.
Dies folgt unmittelbar aus dem Satz, dass $[B]$ ist offensichtlich S-stetig.

__Satz__ Sei $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ intern und nicht-antizipierend.
Dann ist $\int X \, dB$ ein internes Martingal.

__Beweis:__ $$\mathbb{E}\left[1_A \cdot \left(\int_0^t X \, dB - \int_0^s X \, dB \right) \right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[1_A \sum_s^t X \Delta B \right] = 0 \quad \text{für } s < t \in \mathbb{T} \text{ und } A \in \mathfrak{A}_s.$$

da $\Delta B = \pm\sqrt{\frac{1}{N}}$ und daher jeder Summand der mit $+\sqrt{\frac{1}{N}}$ auftritt auch mit $-\sqrt{\frac{1}{N}}$ auftritt wegen $A \in \mathfrak{A}_s$ und X nicht-antizipierend.

$\boxtimes$

__Satz__ Sei $X : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ intern und S-beschränkt.
Dann ist $\left(\int X \, dB \right)(\omega, .)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ S-stetig.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Schranke für X. Dann gilt

$$\left[\int X\,dB\right]_t - \left[\int X\,dB\right]_s = \sum_s^t X^2 \Delta B^2 \le n^2 \sum_s^t \Delta B^2 \le n^2(t-s).$$

Also ist $\left[\int X\,dB\right]$ S-stetig. Da aber nach dem letzten Satz $\int X\,dB$ ein Martingal ist, ist dann nach einem früheren Satz auch $\int X\,dB$ S-stetig.

$\boxtimes$

Damit möchte ich meinen kurzen Überblick über die nonstandard Theorie des Ito-Integrals abschließen. Nun noch zwei Anwendungen:

Satz (Itôs Lemma)

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und ϕ' ~~ϕ~~ ϕ'' beschränkt. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$ und μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$:

$$\phi(b_t) = \phi(b_0) + \int_0^t \phi'(b_s)\,db_s + \frac{1}{2}\int_0^t \phi''(b_s)\,ds$$

Beweis: Seien $f := \phi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g := \phi'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Da f stetig ist, gilt $f^*(x) \approx f^*(y)$ für alle finiten $x \approx y \in {}^*\mathbb{R}$. Außerdem ist $-\infty < B(\omega, t) \approx b(\omega, {}^\circ t) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$. Somit ist $f^*(B(.,.))$ ein Lifting von $f(b(.,.))$. Desweiteren ist $f^*(B) : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ S-beschränkt, da ϕ' beschränkt ist. Also ist $f^*(B)$ quadrat-S-integrierbar. Da $B : \Omega \times \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ nicht-antizipierend ist, ist auch $f^*(B)$ nicht-antizipierend. Also gilt für alle $t \in \mathbb{T}$ und μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$

$$\int_0^{{}^\circ t} \phi'(b(\omega, s))\, dB = {}^\circ\left(\int_0^t f^*(B(\omega, s))\, dB \right).$$

Sei $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\mu_L(\Omega') = 1$, so dass $B(\omega, .) : \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ für alle $\omega \in \Omega'$ S-stetig ist. Da g stetig ist, gilt $g^*(x) \approx g^*(y)$ für alle finiten $x \approx y \in {}^*\mathbb{R}$. Also ist $g^*(B(\omega, .)) : \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$ ein Lifting von $\phi''(b(\omega, .))$ für alle $\omega \in \Omega'$.

Außerdem ist $g^*(B(\omega, .))$ S-stetig auf $\mathbb{T}$ für alle $\omega \in \Omega'$.

Somit ist $g^*(B(\omega, .))$ S-beschränkt für alle $\omega \in \Omega'$ und damit S-integrierbar.

Also gilt für alle $\omega \in \Omega'$ und alle $t \in \mathbb{T}$

$$\int_0^{{}^\circ t} \phi''(b_s)\, ds = {}^\circ\left(\sum_0^t g^*(B_s)\,\frac{1}{N}\right).$$

Somit reicht es

$$\phi^*(B_t) - \phi^*(B_0) \approx \sum_0^t f^*(B_s)\,\Delta B_s + \frac{1}{2}\sum_0^t g^*(B_s)\,\frac{1}{N}$$

für μ_L-fast alle $\omega \in \Omega$ zu zeigen.

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$\forall B \ldots \; \forall n \in \mathbb{N} \; \Big(\mathbb{T} = \{0, \tfrac{1}{n}, \ldots, 1\} \longrightarrow$$

$$\exists\, \xi : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \; \forall s \in \mathbb{T} : \xi_s \in \left[\min(B_s, B_{s+\frac{1}{n}}), \max(B_s, B_{s+\frac{1}{n}})\right]$$

$$\wedge \; \phi(B_s + \Delta B_s) - \phi(B_s) = \phi'(B_s)\,\Delta B_s + \frac{1}{2}\phi''(\xi_s)\,\Delta B_s^2 \Big).$$

Nach Transfer ex. also eine interne Folge $\xi : \mathbb{T} \to {}^*\mathbb{R}$, so dass ξ_s stets ein Punkt zwischen B_s und $B_s + \Delta B_s$ ist und

$$\phi(B_s + \Delta B_s) - \phi(B_s) = f^*(B_s)\,\Delta B_s + \frac{1}{2} g^*(\xi_s) \cdot \frac{1}{N}$$

gilt.

Da g stetig ist, ex. für alle $s \in T$ ein $\varepsilon_s \approx 0$ mit $g^*(\xi_s) = g^*(B_s) + \varepsilon_s$. Nach Overspill ex. also ein $\varepsilon \approx 0$, so dass für alle $s \in T$ $|g^*(\xi_s) - g^*(B_s)| \leq \varepsilon$ gilt.

Somit ist $\phi^*(B_t) - \phi^*(B_0) = \sum_{s=0}^{t} \left[\phi^*(B_{s+\frac{1}{N}}) - \phi^*(B_s) \right]$

$$= \sum_{s=0}^{t} f^*(B_s)\,\Delta B_s + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t} g^*(B_s)\frac{1}{N} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t} \varepsilon_s \frac{1}{N}}_{\approx 0}$$

da $\overbrace{-\frac{1}{2}\varepsilon(t-s)}^{\approx 0} = -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t}\varepsilon\frac{1}{N}$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t}\varepsilon_s\frac{1}{N} \leq \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t}\varepsilon\frac{1}{N} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon(t-s)}_{\approx 0}.$$

$\boxtimes$

Die zweite Anwendung soll ein Existenzsatz für Lösungen von stoch. Differentialgleichungen sein.

Sei dann $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{H} = \{0, 1, \dots, H\}.$$

Definiere

$$\Omega := \{\omega : \mathbb{T} \times \mathbb{H} \longrightarrow \{-1, 1\} \mid \omega \text{ intern}\}$$

$$\mathfrak{A} := \{X \subseteq \Omega \mid X \text{ intern}\}$$

$$\mu(X) = \frac{\#(X)}{\#(\Omega)} \quad \text{für} \quad X \in \mathfrak{A}$$

Auf $(\Omega, L(\mathfrak{A}), \mu_L)$ kann man für alle $n \in \mathbb{N}$ n-dimensionale Brownsche Bewegungen definieren. Sei dann $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Sei

$$\mathbb{B}(\omega, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{t} \frac{\omega(s,i)}{\sqrt{\frac{1}{N}}} \vec{e}_i .$$

Setze $b(\omega, {}^\circ t) = {}^\circ\mathbb{B}(\omega, t)$. Dann ist wie im endlichdimensionalen Fall $b(\omega, t) : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ eine n-dim. Brownsche Bewegung bzgl. $(\Omega, L(\mathfrak{A}), \mu_L)$.

Analog wie im endlichdimensionalen Fall lassen sich die interne Filtration $(\mathfrak{A}_t)_{t \in T}$ und das dazugehörige $(\mathcal{L}_t)_{t \in [0,1]}$ konstruieren.

Außerdem überträgt sich der Satz über Liftings und den Zusammenhang zwischen standard Ito-Integral und Standardteil des internen ~~Ito~~ stoch. Integrals

$$\left(\int X \, dB\right)(\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} X(\omega, s) \cdot \Delta B(\omega, s).$$

Satz

Sei b die oben konstruierte n-dimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, L(\mathfrak{A}), \mu_L)$. Seien

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n}_{\text{Raum der } n \times n\text{-Matrizen}}$$

stetig und beschränkt. Dann ex. für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein $(\mathcal{L}_t)_{t \in [0,1]}$-adaptierter Prozeß $x : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$f(s, x(\omega, s)) \in L^1(\Omega \times [0,1])$$
$$g(s, x(\omega, s)) \in L^2(\Omega \times [0,1]) \quad \text{und}$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds + \int_0^t \cancel{f h} \, g(s, x(s)) \, db$$

μ_L-fast überall.

Beweis: Betrachte die interne Differenzengleichung

$$X_t = x_0 + \sum_{s=0}^{t} {}^*f(s, X_s) \cdot \frac{1}{N} + \sum_{s=0}^{t} {}^*g(s, X_s) \, \Delta B_s$$

Durch Induktion sieht man leicht, dass diese eine Lösung $X : \Omega \times \mathbb{T} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ hat.

Definiere $x : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$x(\omega, {}^\circ t) = {}^\circ X(\omega, t) .$$

Wie im Beweis von Itos Lemma sieht man, dass ${}^*g(s, X_s)$ und ${}^*f(s, X_s)$ Liftings von $g(s, x_s)$ und $f(s, x_s)$ sind, die die nötigen Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllen.

Also gilt

$$x({}^\circ t) = {}^\circ X(t) = x_0 + {}^\circ \sum_{s=0}^{t} {}^*f(s, X_s) \cdot \frac{1}{N} + {}^\circ \sum_{s=0}^{t} {}^*g(s, X_s) \Delta B_s$$

$$= x_0 + \int_0^{{}^\circ t} f(s, x_s) \, ds + \int_0^{t} g(s, x_s) \, db .$$

$\boxtimes$

Will man f und g nicht als stetig voraussetzen, dann kann nicht f^* und g^* verwenden, um Liftings zu erhalten. Denn braucht man Lifting-theoreme um geeignete F und G wählen zu können.