# 4. Konstruktion einer Nonstandard-Einbettung

Zunächst wollen wir uns mit Ultrapotenzen von $V(\mathbb{R})$ beschäftigen. Natürlich kann man auch von der Struktur $(V(\mathbb{R}), \in)$ eine Ultrapotenz wie in der Einleitung bilden. Diese wird allerdings nicht wieder eine Superstruktur sein. Daher wandeln wir die Konstruktion wie folgt ab:

Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $I$. Schreibe "$\varphi(i)$ fast überall" statt $\{i \in I \mid \varphi(i)\} \in \mathcal{U}$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$F_n = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in V_n(\overset{S}{\cancel{\mathbb{R}}}) \text{ fast überall}\}$$

Sei $F = \bigcup \{F_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Für $f, g \in F$ setze

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; f(i) = g(i) \text{ fast überall.}$$

Aufgrund der Ultrafiltereigenschaften ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für $f \in \mathcal{F}$ sei $\bar{f} := \{ g \in \mathcal{F} \mid g \sim f \}$ und

$$\mathrm{Ult}_u(V(S)) := \mathcal{F}/\sim .$$

Setze

$$\bar{f} \; E \; \bar{g} \quad :\Longleftrightarrow \quad f(i) \in g(i) \text{ fast überall.}$$

Dadurch ist $E$ wohldefiniert, d.h. die Definition hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

Außerdem sieht man leicht:

(a) Ist $f \sim g$, so gilt $f \in \mathcal{F}_n \Longleftrightarrow g \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Ist $n \geq 1$ und $f \in \mathcal{F}_n$, so gilt

$$\bar{g} \; E \; \bar{f} \Longrightarrow \bar{g} \in \bigcup \{ \mathcal{F}_k \mid k < n \} .$$

(c) Seien $f, g \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$. Dann gilt

$$\bar{f} = \bar{g} \Longleftrightarrow \{ \bar{h} \mid \bar{h} \; E \; \bar{f} \} = \{ \bar{h} \mid \bar{h} \; E \; \bar{g} \} .$$

Die letzten beiden Bedingungen beweisen, dass $(\mathrm{Ult}_u(V(S)), E)$ extensional und fundiert ist.

Auf $(Ult_u(V(S)), E)$ wenden wir nun den Mostowski-Kollaps an. D.h. wir definieren rekursiv eine Abb.

$$\pi : Ult_u(V(S)) \longrightarrow V(S')$$

durch:

Für $f \in \mathcal{F}_0$ sei $\pi(\bar{f}) = \bar{f}$.

Sei $\pi \upharpoonright \overline{\mathcal{F}_n}$ bereits definiert und $f \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Dann setze

$$\pi(\bar{f}) = \{\pi(\bar{g}) \mid g \in \mathcal{F}_n, \ \bar{g} \, E \, \bar{f}\}.$$

Wie üblich gilt:

(i) $\pi(\bar{f}) = \{\pi(\bar{g}) \mid \bar{g} \, E \, \bar{f}\}$

(ii) $\pi(\bar{f}) = \pi(\bar{g}) \iff \bar{f} = \bar{g} \iff f(i) = g(i)$ fast überall

(iii) $\pi(\bar{f}) \in \pi(\bar{g}) \iff \bar{f} \, E \, \bar{g} \iff f(i) \in g(i)$ fast überall

## Satz von Łoś

Für alle $\{\in,\emptyset\}$-Formeln $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ und alle $f_1,\dots,f_n \in F$ gilt:

$$\mathrm{Ult}_u(V(S)) \models \varphi(\overline{f_1},\dots,\overline{f_n})$$

$$\iff V(S) \models \varphi(f_1(i),\dots,f_n(i)) \text{ fast überall.}$$

<u>Beweis</u> wie in der Einleitung.

Für $x \in V(S)$ sei $f_x : I \to V(S)$ die konstante Funktion mit Wert $x$. Definiere

$$j : V(S) \to \mathrm{Ult}_u(V(S)), \quad x \longmapsto \overline{f_x}.$$

<u>Satz</u>

$j : V(S) \to \mathrm{Ult}_u(V(S))$ ist eine elementare Einbettung.

<u>Beweis</u>: Dies folgt aus dem Satz von Łoś wie in der Einleitung. ☒

Wir haben also $j: V(S) \longrightarrow Ult_u(V(S))$ und $\pi: Ult_u(V(S)) \longrightarrow V(S')$.

Damit definieren wir

$$* := \pi \circ j : V(S) \longrightarrow V(S').$$

**Satz**

$*: V(S) \longrightarrow V(S')$ ist $\Sigma_0$-elementar.

**Beweis:** Betrachte

$$V(S) \xrightarrow{j} Ult_u(V(S)) \xrightarrow{\pi} rng(\pi) \xrightarrow{id} V(S')$$

elementar

Isomorphismus, also elementar

$\Sigma_0$-elementar, da $rng(\pi)$ und $V(S')$ transitiv.

$\Sigma_0$-Aussagen sind absolut zu transitiven $\in$-Modellen.

$\square$

Es gilt

$$x \in S \iff V(S) \models \neg(\exists y \in x)(y = y) \wedge x \neq \emptyset$$

Aufgrund der $\Sigma_0$-Elementarität von $*$ gilt also

$$x \in {}^*S \iff V(S') \models \neg(\exists y \in x)(y = y) \wedge x \neq \emptyset.$$

Also ${}^*S = S'$!

Wähle z.B. $I = \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ einen Ultrafilter auf $I$, der den Fréchet-Filter fortsetzt und $S = \mathbb{R}$. Und identifiziere $\overline{f_x}$ mit $x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt: ${}^*: V(\mathbb{R}) \to V({}^*\mathbb{R})$ und

Extensionsprinzip: ${}^*r = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$ ← umfasst Fréchet-Filter

Transferprinzip: $^*$ ist $\Sigma_0$-elementar.

Was offensichtlich fehlt ist die

Polysaturiertheit. Sei $\{X_i \mid i \in V(\mathbb{R})\}$ eine Familie von internen Mengen, die die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt, dann ist $\bigcap \{X_i \mid i \in V(\mathbb{R})\} \neq \emptyset$.

Die Polysaturiertheit werden wir durch die rekursive Definition einer elementaren Kette wahr machen. Für den Nachfolgerschritt verwenden wir den folgenden Kompaktheitssatz.

Satz

Sei $\mathcal{L} = \{X_i \mid i \in V(S)\} \subseteq V(S)$ eine Familie, die die endliche Durchschnittseigenschaft erfüllt. Dann ex. $V(S')$ und $*: V(S) \longrightarrow V(S')$ mit $\bigcap\{{}^*X_i \mid i \in V(S)\} \neq \emptyset$.

Beweis: Wir können annehmen, dass $\mathcal{L}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Sei $I = \{x \subseteq \mathcal{L} \mid x \text{ endlich}\}$. Da $\mathcal{L}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, ex. für alle $i \in I$ ein $a_i \in V(S)$ mit $a_i \in \bigcap i \in \mathcal{L}$. Für jedes $A \in \mathcal{L}$ definiere

$$\tilde{A} := \{i \in I \mid a_i \in A\} \subseteq I$$

und

$$G := \{\tilde{A} \mid A \in \mathcal{L}\} \subseteq \mathcal{P}(I)$$

Dann gilt $\emptyset \notin G$, da $\{A\} \in \tilde{A}$. Und $G \neq \emptyset$, da $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Sind außerdem $A, B \in \mathcal{L}$, dann ist $\widetilde{A \cap B} \in G$ und $\widetilde{A \cap B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$. Also ist $F(G) := \{B \subseteq I \mid \exists C \in G : C \subseteq B\}$ ein Filter. Wähle einen Ultrafilter $U$ auf $I$ mit $F(G) \subseteq U$.

Dann gilt

$$\{i \in I \mid a_i \in A\} = \tilde{A} \in G \subseteq F(G) \subseteq D.$$

für alle $A \in \mathcal{L}$.

Somit gilt

$$\mathrm{Ult}_u(V(S)) \models \overline{(a_i)_{i\in I}} \in \overline{(A)}$$

für alle $A \in \mathcal{L}$ nach dem Satz von Łoś.

Nach Transitivieren liefert das aber gerade die Behauptung.

$\boxtimes$

Sei nun $\lambda \in \mathrm{Lim}$ und $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \lambda \rangle$ ein System von $\Sigma_0$-elementaren Einbettungen $*_{\alpha\beta} : V(S_\alpha) \longrightarrow V(S_\beta)$ mit $*_{\alpha\gamma} = *_{\beta\gamma} \circ *_{\alpha\beta}$ für alle $\alpha < \beta < \gamma < \lambda$. ~~Auf Seiten ist~~

~~$*_{\alpha\beta}$~~

Setze
$$W = \{(\alpha, x) \mid \alpha < \lambda,\ x \in V(S_\alpha)\}.$$

Für ~~$\alpha \le \beta$~~ $(\alpha, x), (\beta, y) \in W$ definiere

$$(\alpha, x) \sim (\beta, y) \ :\Longleftrightarrow\ \exists \gamma < \lambda : *_{\alpha\gamma}(x) = *_{\beta\gamma}(y).$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für $(\alpha, x) \in W$ sei $\overline{(\alpha, x)} := \{(\beta, y) \mid (\beta, y) \sim (\alpha, x)\}$ und

$$\mathrm{Lim}(\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \lambda \rangle) := W/_{\sim}.$$

Setze

$$\overline{(\alpha,x)}\ E\ \overline{(\beta,y)} \;:\Longleftrightarrow\; \exists \gamma < \lambda \;:\; *_{\alpha\gamma}(x) \in *_{\beta\gamma}(y).$$

Dadurch ist $E$ wohldefiniert, $(\mathrm{Lim}(\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha<\beta<\lambda\rangle), E)$ ist extensional und fundiert. D.h. wir können den Mostowski-Kollaps

$$\pi : \mathrm{Lim}(\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \lambda\rangle) \longrightarrow V(S')$$

bilden. Für $\alpha < \lambda$ definiere außerdem

$$j_\alpha : V(S_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Lim}(\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \lambda\rangle)$$

durch $\qquad x \longmapsto \overline{(\alpha,x)}$.

Setze $\quad *_{\alpha\lambda} = \pi \circ j_\alpha$ und $S' = S_\lambda$.

Dann ist $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \lambda\rangle$ ein System von $\Sigma_0$-elementaren Einbettungen $*_{\alpha\beta} : V(S_\alpha) \to V(S_\beta)$ mit $*_{\alpha\gamma} = *_{\beta\gamma} \circ *_{\alpha\beta}$ für alle $\alpha < \beta < \gamma \leq \lambda$.

Lemma

Sei $V(S)$ gegeben. Dann ex. $\Sigma_0$-elementare Einbettung $* : V(S) \longrightarrow V(S')$, so dass für jede Familie $\mathfrak{F} = \{X_i \mid i \in V(S)\} \subseteq V(S)$, die die endl. Durchschnittseigenschaft erfüllt, $\bigcap \{{}^*X_i \mid i \in V(S)\} \neq \emptyset$ gilt.

Beweis: Sei $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$, $\kappa \in Card$ eine Aufzählung aller Familien wie im Lemma. Wir definieren durch transfinite Rekursion eine $\Sigma_0$-elementare Kette, d.h. ein System $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \kappa \rangle$ von $\Sigma_0$-elementaren Einbettungen $*_{\alpha\beta} : V(S_\alpha) \longrightarrow V(S_\beta)$ mit $*_{\alpha\gamma} = *_{\beta\gamma} \circ *_{\alpha\beta}$ für alle $\alpha < \beta < \gamma \leq \kappa$, so dass gilt

$$\bigcap *_{0\alpha} [\mathfrak{F}_\beta] \neq \emptyset \quad \text{für alle } \beta < \alpha \leq \kappa$$

Das Lemma gilt also für $S' := S_\kappa$ und $* := *_{0\kappa}$.

Nachfolgerschritt: Sei $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \gamma \rangle$ bereits definiert. Betrachte $*_{0\gamma}[\mathfrak{F}_\gamma]$. Dann hat $*_{0\gamma}[\mathfrak{F}_\gamma]$ die endl. Durchschnittseigenschaft aufgrund der $\Sigma_0$-Elementarität von $*_{0\gamma}$. Wähle nach einen früheren Satz eine $\Sigma_0$-elementare Einbettung

$* : V(S_\gamma) \to V(S') \text{ mit } \bigcap *[*_{0\gamma}[\mathcal{L}_\gamma]] \neq \emptyset$.

Setze $*_{\gamma,\gamma+1} := *$, $S_{\gamma+1} := S'$ und $*_{\alpha,\gamma+1} := * \circ *_{\alpha\gamma}$

für alle $\alpha < \gamma$.

Limesschritt: Sei $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \lambda \rangle$ mit $\lambda \in \mathrm{Lim}$ bereits

definiert. Dann definiere $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \lambda \rangle$ wie oben.

Das Lemma gilt nun für $* := *_{0\kappa}$ und $S' = S_\kappa$.

$\boxed{/\!/}$

Nun können wir ein $* : V(\mathbb{R}) \longrightarrow V({}^*\mathbb{R})$ konstruieren, so dass die Polysaturiertheit erfüllt ist. Auch dies machen wir wieder, indem wir durch transfinite Rekursion eine $\Sigma_0$-elementare Kette konstruieren. Sei dazu $\kappa = \mathrm{card}(V(\mathbb{R}))$. Wir definieren $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \kappa^+ \rangle$.

<u>Nachfolgerschritt:</u> Sei $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \gamma \rangle$ bereits definiert. Wähle $* : V(S_\gamma) \longrightarrow V(S')$ wie im letzten Lemma, setze $*_{\gamma,\gamma+1} := *$, $S_{\gamma+1} = S'$ und $*_{\alpha,\gamma+1} := * \circ *_{\alpha\gamma}$ für alle $\alpha < \gamma$.

<u>Limesschritt:</u> Sei $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta < \lambda \rangle$ mit $\lambda \in \mathrm{Lim}$ bereits definiert. Dann definiere $\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \lambda \rangle$ wie oben.

Setze schließlich $* := *_{0\kappa^+} : V(\mathbb{R}) \longrightarrow V(S_{\kappa^+})$.

Für den Beweis der Polysaturiertheit sei

$\pi : \mathrm{Lim}(\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \le \kappa^+ \rangle) \longrightarrow V(S_{\kappa^+})$ der Mostowski-Kollaps im letzten Schritt. Sei $\{X_i \mid i \in \kappa\} \subseteq V(S_{\kappa^+})$ eine Familie von internen Mengen, die die endl. Durchschnittseigenschaft hat. Da jedes $X_i$ intern ist, ex. ein $Y_i \in V(\mathbb{R})$ mit $X_i \in {}^*Y_i \in \mathrm{rng}(\pi)$. Da $\mathrm{rng}(\pi)$ transitiv ist, ist also auch $X_i \in \mathrm{rng}(\pi)$. Sei $\overline{X_i} \in \mathrm{Lim}(\langle *_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \le \kappa^+ \rangle)$ und $X_i = \pi(\overline{X_i})$. Da $\kappa^+$ regulär ist, ex. ein $\delta < \kappa^+$ mit

$\mathcal{L}' := \{\overline{X_i} \mid i \in \kappa\} \subseteq \{\overline{(\beta, x)} \mid \beta < \delta, \ x \in V(S_\beta)\}$.

Setze $\mathcal{L}'' := \{*_{\beta\delta}(x) \mid \overline{(\beta, x)} \in \mathcal{L}'\}$. Dann gilt $*_{\delta\kappa^+}[\mathcal{L}''] = \mathcal{L}$. Also erfüllt $\mathcal{L}''$ aufgrund der $\Sigma_0$-Elementarität von $*_{\delta\kappa^+}$ die endl. Durchschnittseigenschaft.

Aufgrund der Konstruktion gilt also

$$\bigcap *_{\delta,\delta+1}[\mathcal{L}''] \neq \emptyset.$$

Da $*_{\delta+1,u+}$ $\Sigma_0$-elementar ist, gilt also auch

$$\bigcap\{X_i \mid i \in u\} = \bigcap *_{\delta+1,u+} *_{\delta,\delta+1}[\mathcal{L}''] \neq \emptyset.$$