1. Bäume

Ein Baum ist eine partiell geordnete Menge $\langle T, \leq_T \rangle$, so dass für jedes $x \in T$ die Menge $\{y \mid y <_T x\}$ durch $<_T$ wohlgeordnet wird.

Sei $x \in T$. Definiere

$$ht_T(x) = otp\{y \mid y <_T x\} \quad \text{"die Höhe von } x\text{"}$$

$$T_\alpha = \{x \mid ht_T(x) = \alpha\} \quad \text{"die } \alpha\text{-te Stufe von } T\text{"}$$

$$ht(T) = \sup\{ht_T(x) + 1 \mid x \in T\} \quad \text{"die Höhe von } T\text{"}$$

Ein Zweig b in T ist eine maximale linear geordnete Teilmenge $b \subseteq T$. Die Länge von b ist der Ordnungstyp von b.

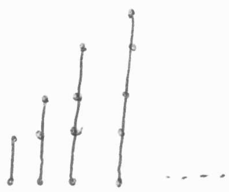
Eine Antikette A in T ist eine Menge $A \subseteq T$, so dass zwei verschiedene Elemente $x, y \in T$ stets unvergleichbar sind, d.h. weder $x <_T y$ noch $y <_T x$.

Ein Zweig der mit jeder Stufe von T einen nicht-leeren Durchschnitt hat heißt kofinal.

Ein Baum der Höhe κ, bei dem alle Stufen eine Kardinalität $< \kappa$ haben, heißt κ-Baum.

Satz: Jeder ω-Baum T hat einen kofinalen Zweig.

Gegenbeispiel: Es reicht nicht, daß der Baum Höhe ω hat.



Das ist auch ein Baum!

Beweis: Wähle rekursiv $t_n \in T_n$, so dass $t_n <_T t_{n+1}$ und t_n immer Nachfolger auf jeder Stufe T_m mit $n < m$ hat. Diese Rekursion bricht nicht ab. Denn da T Höhe ω hat, aber nur endlich viele Elemente in T_0 ex. ein $t_0 \in T_0$ mit dieser Eigenschaft. Nun kann man, da T_1 nur endlich viele Elemente hat ein geeignetes t_1 finden usw.

offensichtlich ist $\{t_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ ein kofinaler Zweig.

$\square$

<u>Frage</u>: Gibt es einen ω_1-Baum ohne kofinalen Zweig?

Ein solcher Baum heißt Aronszajn-Baum. Allgemeiner ist ein κ-Aronszajn-Baum ein κ-Baum ohne kofinale Zweige.

<u>Satz</u> (Aronszajn)

Es gibt einen Aronszajn-Baum.

<u>Beweis:</u> Seminar letztes Semester.

<u>Frage:</u> Gibt es einen ω_2-Aronszajn-Baum?

~~Wir werden sehen: Diese Frage wird von ZFC nicht entschieden.~~

Wir werden sehen: $\mathrm{Con}(ZFC) \to \mathrm{Con}(ZFC + \text{ex. } \omega_2\text{-Aronszajn-Baum})$

D.h. gibt es ein Modell von ZFC, so gibt es auch eines von ZFC + ex. ω_2-Aronszajn-Baum. (Forcing).

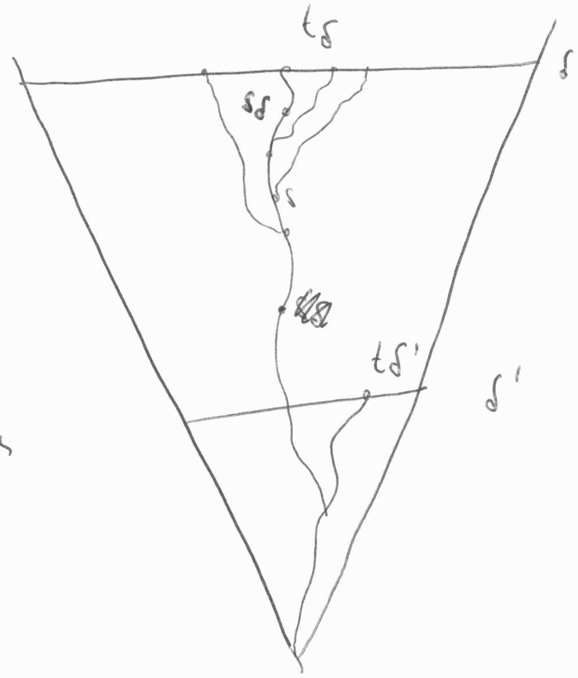
Aber <u>nicht</u>: $\mathrm{Con}(ZFC) \to \mathrm{Con}(ZFC + \text{ex. kein } \omega_2\text{-Aronszajn-Baum})$.

Dazu braucht man eine stärkere Voraussetzung (große Kardinalzahl).

Allerdings gilt folgender

<u>Satz</u> Sei κ regulär und T ein Baum der Höhe κ. Sei $\lambda < \kappa$, so dass für alle $\alpha < \kappa$ $|T_\alpha| < \lambda$ gilt. Dann hat T einen kofinalen Zweig.

<u>Beweis:</u> Sei λ o.B.d.A. regulär. Für jedes $\delta < \kappa$ mit $cf(\delta) = \lambda$ wähle $t_\delta \in T_\delta$ beliebig. Nun wähle für jedes $\delta < \kappa$ mit $cf(\delta) = \lambda$ ein $s_\delta <_T t_\delta$, so dass $\{ s \mid s_\delta <_T s \} \cap T_\delta = \{ t_\delta \}$.



Ein solches ex., weil sonst wäre $|T_\delta| \geq \lambda$. Nach dem Lemma von Fodor ex. eine stationäre Menge $A \subseteq \{ \delta < \kappa \mid cf(\delta) = \lambda \}$ und $\gamma < \kappa$, so dass $ht_T(s_\delta) = \gamma$ für alle $\delta \in A$.

Da $|T_\gamma| < \lambda < \kappa$ ist, gibt es also ein $s \in T_\gamma$, so dass $s_\delta = s$ für unbeschränkt viele $\delta \in \kappa$. Nun sieht man leicht, daß für zwei solche $\delta' < \delta$ $t_{\delta'} < t_\delta$ gilt. Also definieren die zugehörigen t_δ einen konfinalen Zweig. $\square$

Zur Erinnerung:

Eine Funktion $f: E \to \lambda$ mit $E \subseteq \lambda$ heißt regressiv, wenn $f(\alpha) < \alpha$ für alle $0 \neq \alpha \in E$ gilt.

Satz von Fodor

Sei $\kappa > \omega$ regulär und $E \subseteq \kappa$ stationär. Ist dann $f: E \to \kappa$ regressiv, so gibt es ein $\beta \in \kappa$, so dass die Menge $\{\alpha \in E \mid f(\alpha) = \beta\}$ stationär in κ ist.

Ein κ-Baum, der weder einen Zweig noch eine Antikette der Größe κ besitzt, heißt κ-Suslin Baum.

Die Existenz von ω_1-Suslin Bäumen hängt eng mit einer klassischen Frage von M. Suslin zusammen (vgl. Seminar letztes Semester).

Es gilt: i) Con (ZFC) $\longrightarrow$ Con (ZFC + ex. ω_1-Suslin Baum)

ii) Con (ZFC) $\longrightarrow$ Con (ZFC + ex. kein ω_1-Suslin Baum)

(i) wurde im Seminar gezeigt. Für (ii) benötigt man iteriertes Forcing.

Die Situation für höhere Kardinalzahlen ist wie für κ-Aronszajn Bäume. Die Konsistenz der Existenz geht mit Forcing, die Konsistenz der Nicht-Existenz braucht große Kardinalzahlen.

Ein κ^+-Baum heißt κ^+-Kurepa Baum, wenn er κ^{++} viele Zweige hat.

Die Situation bzgl. Existenz / Nicht-Existenz ist ähnlich wie bei Suslin-Bäumen.

Eine κ^+-Kurepa Familie ist eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa^+)$, so dass $|\mathcal{F}| = \kappa^{++}$ und für alle $\alpha < \kappa^+$

$$|\mathcal{F} \upharpoonright \alpha| \leq \kappa \text{ gilt, wobei}$$

$$\mathcal{F} \upharpoonright \alpha = \{ x \cap \alpha \mid x \in \mathcal{F} \}.$$

<u>Satz</u> Eine κ^+-Kurepa Familie existiert genau dann, wenn ein κ^+-Kurepa Baum existiert.

<u>Beweis:</u> Sei $(T, <_T)$ ein κ^+-Kurepa Baum. Sei o.B.d.A. $T = \kappa^+$ und $\alpha < \beta$ falls $\alpha <_T \beta$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge der kofinalen Zweige von T. Dann ist $\mathcal{F}$ eine κ^+-Kurepa Familie.

Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ eine κ^+-Kurepa Familie.
Für jedes $x \in \mathcal{F}$ definiere eine Funktion $f_x : \kappa^+ \to \mathcal{P}(\kappa^+)$ durch $f_x(\alpha) = x \cap \alpha$. Sei $T = \{ f_x \upharpoonright \alpha \mid x \in \mathcal{F} \wedge \alpha < \kappa^+ \}$.
Für $g_1, g_2 \in T$ setze $g_1 <_T g_2$ genau dann, wenn $g_1 \subseteq g_2$. Offensichtlich ist $\underset{\sim}{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ ein Baum.
Da $|\mathcal{F} \upharpoonright \alpha| \leq \kappa$ für alle $\alpha < \kappa^+$ gilt, ist $\underset{\sim}{T}$ ein κ^+-Baum. Und für jedes $x \in \mathcal{F}$ ist $b_x = \{ f_x \upharpoonright \alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$ ein kofinaler Zweig, so dass $b_x \neq b_y$ für $x \neq y$ gilt. D.h. T ist ein ~~ult~~ κ^+-Kurepa Baum.

$\boxtimes$

<u>Satz</u> Es gelte CH. Dann gibt es eine Bedingungsmenge $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P} \Vdash$ (es ex. ein ω_1-Kurepa Baum).

<u>Beweis:</u> Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Paare $(\underset{\sim}{T}, f)$ mit

(1) $\underset{\sim}{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ ist ein Baum, $T = \gamma < \omega_1$

(2) Jedes $x \in T$ hat zwei Nachfolger auf der nächsten Stufe

(3) Für jedes $x \in T$ gibt es einen kofinalen Zweig durch x.

(4) f ist injektive Funktion, $\mathrm{dom}(f) \subseteq \omega_2$, $|\mathrm{dom}(f)| = \omega$

(5) $\mathrm{rng}(f) \subseteq \{ b \mid b$ kofinaler Zweig in $T\}$.

Sei $(\underset{\sim}{T}_1, f_1) \leq (\underset{\sim}{T}_2, f_2)$ gdw.

(a) $\underset{\sim}{T}_1$ ist Endfortsetzung von $\underset{\sim}{T}_2$

(b) $\mathrm{dom}(f_1) \supseteq \mathrm{dom}(f_2)$

(c) $f_1(\eta) \supseteq f_2(\eta)$ für alle $\eta \in \mathrm{dom}(f_2)$.

$\mathbb{P}$ ist ω_1-abgeschlossen. Denn sei $\langle p_\gamma \mid \gamma < \delta \rangle$ für $\delta < \omega_1$ eine absteigende Folge von Bedingungen $p_\gamma = (\underset{\sim}{T}_\gamma, f_\gamma)$, $\underset{\sim}{T}_\gamma = \langle T_\gamma, \leq_\gamma \rangle$. Setze $T_\delta = \bigcup \{ T_\gamma \mid \gamma < \delta \}$, $\leq_\delta = \bigcup \{ \leq_\gamma \mid \gamma < \delta \}$, $\mathrm{dom}(f_\delta) = \bigcup \{ \mathrm{dom}(f_\gamma) \mid \gamma < \delta \}$ und $f_\delta(\eta) = \bigcup \{ f_\gamma(\eta) \mid \eta \in \mathrm{dom}(f_\gamma) \}$ für $\eta \in \mathrm{dom}(f_\delta)$. Dann ist $p_\delta \leq p_\gamma$ für alle $\gamma < \delta$. Dabei sind (1), (2), (4), (5) und (a) - (c) klar. Bleibt (3) zu zeigen. Sei $x \in T_\delta$. Sei $\langle \gamma_n \mid n \in \omega \rangle$ eine in δ kofinale, monoton steigende Folge mit $ht_T(x) < \gamma_0$. Da (3) für alle p_δ gilt, gibt es eine Folge $x \leq_T x_0 \leq_T x_1 \leq_T x_2 \leq_T \ldots$, so dass $ht_T(x_n) = \gamma_n$ für alle $n \in \omega$ gilt. Diese definiert einen kofinalen Zweig

Außerdem ist $D_\alpha = \{(T, f) \in \mathbb{P} \mid ht(T) \geq \alpha\}$ für alle $\alpha < \omega_1$ dicht in $\mathbb{P}$. Seien dazu $(T', f') \in \mathbb{P}$ mit $ht(T') = \beta$ und $\beta < \alpha < \omega_1$ gegeben. Wir müssen $(T, f) \leq (T', f')$ mit $(T^*, f^*) \in D_\alpha$ finden. Das kann man rekursiv tun. Definiere dazu T_γ und f_γ mit $dom(f_\gamma) = dom(f')$ für $\beta \leq \gamma \leq \alpha$. Dabei treten die folgenden Fälle auf:

① $\underline{\gamma = \beta}$: Dann setze $T_\gamma = T'$ und $f_\gamma = f'$!

② $\underline{\gamma \in Lim}$: Dann setze $T_\gamma = \bigcup \{T_\eta \mid \beta \leq \eta < \gamma\}$

und $f_\gamma(\eta) = \bigcup \{f_\nu(\eta) \mid \beta \leq \nu < \gamma\}$

für alle $\eta \in dom(f')$.

Um zu sehen, daß dadurch eine Bedingung definiert wird ist insbesondere (3) zu zeigen. Das geht wie im Beweis der Abgeschlossenheit.

③ $\underline{\gamma = \eta + 1,\ \eta \notin Lim}$. Dann definiere T_γ so, dass jedes $x \in T_\eta$ genau zwei direkte Nachfolger hat. Setze jedes $f_\eta(\nu)$ ~~durch~~ jeweils geeignet fort.

(4) $\gamma = \eta + 1$, $\eta \in Lim$. Dann wähle für jedes $x \in T_{\eta}$ einen in T_{η} kofinalen Zweig b_x und setze diesen eindeutig in T_{γ} fort. Werden dadurch kofinale Zweige aus $rng(f_\eta)$ noch nicht auf T_γ fortgesetzt, so füge auch für jeden von diesen einen eindeutigen Punkt darüber zu T_γ hinzu.

Setze $T = T_\alpha$, $f = f_\alpha$.

Desweiteren ist $D_\alpha' = \{(T, f) \in \mathbb{P} \mid \alpha \in dom(f)\}$ ~~dicht~~ für alle $\alpha \in \omega_2$ dicht in $\mathbb{P}$. Sei also $(T', f') \in \mathbb{P}$ und $\alpha \notin dom(f')$. Wir müssen ein $(T, f) \leq (T', f')$ mit $\alpha \in dom(f)$ finden. Setze $T = T'$. Also reicht es einen kofinalen Zweig in T zu finden, der noch nicht in $rng(f')$ liegt. Aber das ist möglich. Denn mit (2) und (3) und einem Argument wie im Beweis der Abgeschlossenheit sieht man, dass T 2^ω-viele kofinale Zweige hat.

Können wir nun noch die ω_2-AB zeigen, so sind wir fertig. Sei dazu $W \subseteq \mathbb{P}$ mit $|W| = \omega_2$. Dann gibt es aufgrund des Δ-System-Lemmas ein $Z \subseteq W$ mit $|Z| = \omega_2$ und $S \subseteq \omega_2$, so dass $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2) = S$ für alle $(T_1, f_1) \neq (T_2, f_2) \in Z$ gilt. Aufgrund von CH ist aber sowohl die Anzahl der (abzählbaren) Bäume als auch der Zweige in den Bäumen ω_1. Also gibt es ein $Z_1 \subseteq Z$ mit $|Z_1| = \omega_2$, so dass $T_1 = T_2$ und $f_1 \restriction S = f_2 \restriction S$ für alle $(T_1, f_1), (T_2, f_2) \in Z_1$ gilt. Solche Bedingungen sind aber kompatibel. Somit hat jede Menge von paarweise inkompatiblen Bedingungen höchstens Mächtigkeit ω_1.

$\boxtimes$

Zur Erinnerung:

<u>Δ-System-Lemma</u>

Sei $\kappa^{<\kappa} = \kappa$. Sei W eine Menge von Mengen mit Kardinalität kleiner κ und $|W| = \kappa^+$. Dann ex. $Z \subseteq W$ mit $|Z| = \kappa^+$ und A, so dass für alle $X \neq Y \in Z$ $X \cap Y = A$ gilt.

Nun soll doch noch ein ω_1-Suslin Baum erzwungen werden.

Wir zeigen genauer: Cohen-Forcing fügt einen Suslin-Baum hinzu. Dazu müssen wir einen Aronszajn-Baum konstruieren.

__Lemma__ Es gibt eine Folge $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \omega_1 \rangle$, so dass

(1) Für alle $\alpha \in \omega_1$ ist f_α eine injektive Funktion $f_\alpha : \alpha \to \omega$.

(2) Für alle $\alpha < \beta < \omega_1$ gilt $f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma)$ für alle außer endlich viele $\gamma < \alpha$.

(3) Für alle $\alpha \in \omega_1$ ist $\omega - \mathrm{rng}(f_\alpha)$ unendlich.

__Beweis:__ Wir wählen die f_α rekursiv. Ist f_α bereits definiert, so wähle ein $n \in \omega - \mathrm{rng}(f_\alpha)$ und setze $f_{\alpha+1} = f_\alpha \cup \{\langle \alpha, n \rangle\}$. Das kann man wegen (3) unendlich oft machen und so bis zum nächsten Limes kommen. Sei also f_α für $\alpha < \gamma$ bereits definiert und $\gamma \in \mathrm{Lim}$. Dann wähle α_n für $n \in \omega$ mit $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ und $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \gamma$. Setze $g_0 = f_{\alpha_0}$ und definiere induktiv $g_n : \alpha_n \to \omega$, so dass g_n injektiv ist, ~~und~~ $g_n(\eta) = f_{\alpha_n}(\eta)$ für alle außer endlich viele $\eta \in \alpha_n$ und $g_{n+1} \upharpoonright \alpha_n = g_n$.

Sei $g = \bigcup\{g_n \mid n \in \omega\}$. Dann würde (1) und (2) gelten, aber (3) könnte schief gehen. Um das zu beheben, definiere $f_\gamma(\alpha_n) = g(\alpha_{2n})$ und $f_\gamma(\eta) = g(\eta)$ für alle $\eta \notin \{\alpha_n \mid n \in \omega\}$. Dann ist $\{g(\alpha_{2n+1}) \mid n \in \omega\} \subseteq$ $\subseteq (\omega - \mathrm{rng}(f_\gamma))$. Also gilt auch (3). $\boxtimes$

Die Menge $\{f_\alpha \restriction \beta \mid \alpha, \beta \in \omega_1\}$ ~~ges~~ mit der Inklusion als partielle Ordnung ist ein Baum T. Da alle $f \in T_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$ sich nur an endlich vielen Stellen von f_α unterscheiden, ist jedes T_α abzählbar. Außerdem hat der Baum keine überabzählbaren Zweige. Denn angen. $\langle g_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\rangle$ wäre ein solcher. Dann wäre $g := \bigcup\{g_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ eine injektive Funktion von ω_1 nach ω. Widerspruch! Also ist T ein Aronszajn-Baum.

Nun betrachte für ~~jede~~ eine Funktion $r: \omega \to \omega$ den Baum

$$T_r = \{ r \circ (f_\alpha \restriction \beta) \mid \alpha, \beta \in \omega_1\}.$$

Dann ist T_r wie zuvor T ein ω_1-Baum. Abhängig von r muß er aber nicht unbedingt ein Aronszajn-Baum sein. Ist aber r Cohen-generisch, so ist er sogar ein ω_1-Suslin Baum.

<u>Satz</u> Sei $\mathbb{P} := \{p : n \to \omega \mid n \in \omega\}$ geordnet durch $\supseteq$.
Sei G $\mathbb{P}$-generisch über V und $r := \bigcup G$.
Dann gilt $V[G] \models T_r$ ist ein ω_1-Suslin Baum.

Wir benutzen folgendes

<u>Lemma</u> Sei $\mathbb{P}$ abzählbar und G $\mathbb{P}$-generisch über V.
Dann ex. für jedes in $V[G]$ überabzählbare $X \subseteq \omega_1$, $X \in V[G]$, eine in V überabzählbare Menge $Y \subseteq X$, $Y \in V$.

<u>Beweis:</u> Sei $\dot{X}^G = X$. Wähle für jedes $\alpha \in X$ ein $p_\alpha \in G$ mit $p_\alpha \Vdash \check{\alpha} \in \dot{X}$. Ein solches ex. nach Wahrheitslemma. Da X überabzählbar ist, $\mathbb{P}$ aber abzählbar, gibt es ein $\gamma \in \omega_1$ und ein überabzählbares $Z \subseteq X$ mit $p_\alpha = p_\gamma$ für alle $\gamma \in Z$.
Setze $Y = \{\alpha \mid p_\gamma \Vdash \check{\alpha} \in \dot{X}\}$.

Dann gilt

$$\alpha \in y \Rightarrow \exists p \in G \quad p \Vdash \check{\alpha} \in \dot{X} \overset{\text{Wahrheitslemma}}{\Longrightarrow} M[G] \models \alpha \in X.$$

Also $y \subseteq X$, aber auch $y \in X$ nach Definierbarkeitslemma.

Außerdem ist $Z \subseteq y$ und Z ist überabzählbar in $V[G]$ und damit auch in V.

Somit ist auch y überabzählbar in $V[G]$. ~~Aber $\mathbb{P}$ erfüllt die ω_1-AB. Daher ist y auch in V überabzählbar.~~ ∎

Nun zum Beweis des Satzes:

Wir zeigen zuerst, dass T_r keine konfinalen Zweige hat.

Beobachte dazu: Ist $\beta \in \mathrm{Lim}$, $g \in \{f_\alpha \upharpoonright \beta \mid \alpha \in \omega_1\}$, $p \in \mathbb{P}$ und $\gamma < \beta$, so gibt es ein $\gamma < \eta < \beta$ und ein $q \leq p$ mit $q \circ g(\eta) = g(\eta)$. Denn g ist injektiv. Also gibt es ein $\gamma < \eta < \beta$ mit $g(\eta) \notin \mathrm{dom}(p)$. Setze $q = \langle p(0), p(1), \dots, p(\mathrm{dom}(p)-1), 0, \dots, 0, \dots, g(\eta)\rangle$.

Ist also $\beta \in \mathrm{Lim}$ und $g \in \{f_\alpha \upharpoonright \beta \mid \alpha \in \omega_1\}$, so stimmen g und $r \circ g$ auf unbeschränkt vielen Punkten überein. Angenommen $\langle r \circ g_\alpha \mid \alpha \in \omega_1 \rangle$ wäre ein konfinaler Zweig. Dann würde $\bigcup \{r \circ g_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ auf unbeschränkt vielen Punkten mit $\bigcup \{g_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ übereinstimmen.

Also gäbe es eine Injektion von einer ω_1-großen Menge in ω. ↯

Bleibt zu zeigen, dass T_γ keine überabzählbare Antikette hat. Ang. $\{r\circ(f_{\alpha(\beta)}\restriction\beta) \mid \beta\in A\}$ wäre eine solche. Dann gäbe es nach dem Lemma ein $W\subseteq A$, $|W|^V=\omega_1$, $W\in V$. ~~so dass~~ Also ist auch $\{r\circ(f_{\alpha(\beta)}\restriction\beta)\mid\beta\in W\}$ eine überabzählbare Antikette. Für $\beta\in W$ sei $g_\beta := f_{\alpha(\beta)}\restriction\beta$.
Sei $p\in\mathbb{P}$. Wir werden ein $q\leq p$ finden und $\beta_1,\beta_2\in W$, so dass $q\Vdash(\check{r}\circ g_{\beta_1}$ und $\check{r}\circ g_{\beta_2}$ sind kompatible Funktionen). D.h. aber $V[G]\models\{\cancel{g_\beta}\, r\circ g_\beta\mid\beta\in W\}$ ist keine Antikette. ↯.

Sei $p=\langle p(0),\dots,p(n-1)\rangle$. Für jedes $\beta\in W$ sei X_β die endliche Menge $\{\xi<\beta\mid g_\beta(\xi)<n\}$. Nach dem Δ-System-Lemma ex. eine endliche Menge $S\subseteq\omega_1$ und ein überabzählbares $Z\subseteq W$, so dass $X_{\beta_1}\cap X_{\beta_2}=S$ und $g_{\beta_1}\restriction S=g_{\beta_2}\restriction S$ für alle $\beta_1\neq\beta_2\in Z$ gilt.

Sei nun $\beta_1 < \beta_2 \in Z$. Wir behaupten, es ex. ein $g \in P$ mit $g \circ (g_{\beta_2} \upharpoonright \beta_1) = g \circ g_{\beta_1}$. Offensichtlich gilt $g \Vdash \check{r} \circ \check{g}_{\beta_1} \subseteq \check{r} \circ \check{g}_{\beta_2}$.

Ein solches g ist leicht zu finden. Denn es gilt $X_{\beta_1} \cap X_{\beta_2} = \delta$ und $g_{\beta_1} \upharpoonright \delta = g_{\beta_2} \upharpoonright \delta$. Und ist $g_{\beta_1}(\eta) = m$, $\eta \in X_{\beta_1} - X_{\beta_2}$ und $g_{\beta_2}(\eta) = k \neq m$, so ist $k \geq n$ und wir können $g(k) = g(m)$ setzen. Analog, falls ~~$g_{\beta_2}(\eta)$~~ $\eta \in X_{\beta_2} - X_{\beta_1}$. Dadurch wird g auf einen Teil von $\{g_{\beta_1}(\eta), g_{\beta_2}(\eta) \mid g_{\beta_1}(\eta) \neq g_{\beta_2}(\eta)\}$ definiert. Ist $g(k)$ bereits definiert und $k = g_{\beta_1}(\eta) \neq g_{\beta_2}(\eta) = m$, so fahren wir wie eben fort. Wiederhole diesen Prozeß rekursiv. Ist schließlich g für $k \in \{g_{\beta_1}(\eta), g_{\beta_2}(\eta) \mid g_{\beta_1}(\eta) \neq g_{\beta_2}(\eta)\}$ noch nicht definiert, setze $g(k) = 0$.

$\boxtimes$

Zum Schluss noch eine exotische <u>Frage</u>:

Sei $\underset{\sim}{T}$ ein κ-Baum.

(a) Ein <u>Pseudozweig</u> (ascent path) von T ist eine Folge $\langle \vec{x}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ mit

(i) $\vec{x}_\alpha = \langle x_\alpha(n) \mid n \in \omega \rangle$ ist injektive Folge aus T_α

(ii) Sind $\alpha < \beta < \kappa$, so ex. $m \in \omega$ mit $x_\alpha(n) <_T x_\beta(n)$ für alle $n \geq m$.

(b) Sei $\mu < \kappa$ regulär. T ist μ-abgeschlossen, falls jede Kette aus T der Länge $< \mu$ einen Nachfolger in T hat. D.h. $\langle T, \geq_T \rangle$ ist als Forcing μ-abgeschlossen.

Gibt es einen μ-abgeschlossenen κ-Souslinbaum mit Pseudozweig?