

2. Kombinatorische Prinzipien

CH: Es gibt eine Folge, die $\mathcal{P}_{\kappa}(\omega_1)$ im Ordnungstyp κ aufzählt.

Satz Es gelte $\kappa^{<\kappa} = \kappa$. Dann ex. ein κ^+ -Aronstein's Baum

Beweis: Konstruiere wie in Lemma 4 Abschnitt 1 eine

Folge $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ von injektiven Funktionen $f_\alpha: \alpha \rightarrow \kappa$,
so dass für $\alpha < \beta < \kappa^+$ $f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma)$ für alle außer
weniger als κ -viele $\gamma < \alpha$ gilt. Dann ist $T = \{f_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+\}$
mit der Inklusion als Ordnung ein κ^+ -Aronstein's Baum.
Insbesondere gilt $|T_\alpha| < \kappa^+$ für alle $\alpha \in \kappa^+$ wegen $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.



Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl.

$\square_\kappa$: Es gibt eine Folge $\langle C_\nu \mid \nu \in \text{Lim}(\kappa^+) \rangle$, so dass

- (1) $C_\nu \subseteq \nu$ ist abgeschlossen und unbeschränkt in ν
- (2) $\text{otp}(C_\nu) \leq \kappa$
- (3) $\mu \in \text{Lim}(C_\nu) \Rightarrow C_\mu = C_\nu \cap \mu$.

Beobachtung: $\square_\omega$ gilt immer. Wähle als C_v einfach
 eine in v unbeschränkte Menge mit $\text{otp}(C_v) = \omega$.

Satz Sei $\kappa > \omega$ regular. Es gelte $\square_\kappa$. Dann ex.
 ein κ^+ -Kronstapf Baum T_κ .

Beweis: Sei $\langle C_v \mid v \in \text{Lin } \kappa^+ \rangle$ eine $\square_\kappa$ -Folge. Die Elemente
 von T_α werden α -Folgen $\vec{x} = \langle x_v \mid v \in \alpha+1 \rangle$ von nicht-
 stationäres Teilmenge $x_v \subseteq \kappa$ sein, so dass $x_\mu \subseteq x_v$ und
 $x_\mu \neq x_v$ für alle $\mu < v \leq \alpha$ gilt. Für $v \in \text{Lin } \kappa+1$
 fordern wir außerdem $x_v = \bigcup \{x_\mu \mid \mu < v\}$. Die
 Baumordnung und so sein, daß

$$\vec{x} \leq_T \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \text{ ist Anfangsstück von } \vec{y}.$$

Das garantiert, daß der Baum kein Zweig der Länge
 κ^+ hat, denn es gibt keine echt aufsteigende κ^+ -Folge
 von Teilmengen von κ .

~~Setze $T_0 = \{\emptyset, \emptyset\}$.~~

Wir konstruieren T rekursiv, so dass für jedes $\vec{x} \in T_\delta$ mit
 $\delta < \kappa$ und $v < \kappa$ ein $\vec{y} \in T_\gamma$ existiert mit $\vec{x} <_T \vec{y}$ und
 $x_\delta \cap v = y_\gamma \cap v$.

Setze $T_0 = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}$.

Nachfolgerschritt: Definiere für jedes $\vec{x} \in T_\alpha$ κ -viele Nachfolger $\vec{y}$ in $T_{\alpha+1}$, so dass für jedes $v < \kappa$ ein $\vec{y}$ ex. mit $x_\alpha \cap v = y_{\alpha+1} \cap v$.

Limesschritt: Sei $\alpha \in \text{Lim}$, $\vec{x} = \langle x_\nu \mid \nu \in \delta+1 \rangle \in T_\delta$, $\delta < \alpha$ und $v < \kappa$. Wir müssen ein $\vec{y} \in T_\alpha$ mit $x_\delta \cap v = y_\alpha \cap v$ definieren.

Definiere dazu rekursiv für $\delta < \gamma \in C_\alpha \setminus \{\alpha\}$

$\vec{x}(\gamma, \alpha, v) :=$ das kleinste $\vec{y} \in T_\gamma$ (in irgendeiner Wohlordnung von V_0 , $\emptyset$ groß),

so dass $\vec{x} <_T \vec{y}$, $x_\delta \cap v = y_\gamma \cap v$,

$$x_\delta \cap \text{otp}(C_\alpha \cap \gamma) = y_\gamma \cap \text{otp}(C_\alpha \cap \gamma) \quad (*)$$

und $\vec{x}(\mu, \alpha, v) <_T \vec{y}$ für alle $\mu \in C_\alpha \cap \gamma$.

Setze $\vec{x}(\alpha, \alpha, v) = \bigcup \{ \vec{x}(\gamma, \alpha, v) \mid \gamma \in C_\alpha \} \cup \{ \langle \alpha, \bigcup \{ \vec{x}(\gamma, \alpha, v) \mid \gamma \in C_\alpha \} \rangle \}$

und $T_\alpha = \{ \vec{x}(\alpha, \alpha, v) \mid \vec{x} \in T_\delta, \delta < \alpha \}$.

Es ist zu zeigen, dass $\bigcup \{ \vec{x}(\gamma, \alpha, v) \mid \gamma \in C_\alpha \}$ nicht-stetig ist.

Dann zeigen wir, dass $\bigcap \{ \kappa - \vec{x}(\gamma, \alpha, v) \mid \gamma \in C_\alpha \}$ kein club enthält. Ist $\text{otp}(C_\alpha) < \kappa$, so ist dies klar, da alle $\kappa - \vec{x}(\gamma, \alpha, v)$ einen club enthalten. Ist aber $\text{otp}(C_\alpha) = \kappa$, so ist $\bigcap \{ \kappa - \vec{x}(\gamma, \alpha, v) \mid \gamma \in C_\alpha \}$ wegen (*) ein diagonaler Durchschnitt von Mengen, die jeweils einen club enthalten. Also enthält es auch einen club.

bleibt zu zeigen, dass die rekursive Definition von $\vec{x}(\gamma, \alpha, v)$ nicht abbricht. Ist γ ein Nachfolger in C_α , so gilt dies wegen unserer Voraussetzung über die Konstruktion. Ist aber $\gamma \in \text{Lim}(C_\alpha)$, so ist $C_\gamma = C_\alpha \cap \gamma$. Also $\vec{x}(\gamma, \alpha, v) = \vec{x}^*(\gamma, \gamma, v)$. Aber $\vec{x}^*(\gamma, \gamma, v) \in T_\gamma$. $\square$

Zur Erinnerung:

Sei $\langle X_\alpha \mid \alpha \in \kappa \rangle$ eine Folge von Teilmengen $X_\alpha \subseteq \kappa$.

Dann heißt
$$\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{ \xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\alpha < \xi} X_\alpha \}$$
$$= \bigcap \{ X_\alpha \cup \alpha \mid \alpha < \kappa \}$$

der diagonale Durchschnitt der X_α .

Ist $\kappa > \omega$ regulär und sind alle $X_\alpha \subseteq \kappa$ club,
 so ist auch $\Delta \{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ club in κ .

Satz Sei $\kappa > \omega$ regulär und es gelte Π_κ .

Dann gilt es, es κ^+ -Aronszajn-Baum.

Beweis: Wie zuvor betrachten wir Folgen von Mengen

$\kappa \subseteq \kappa$. Aber jetzt fordern wir, dass für alle $\mu^+ < \kappa$

die Menge κ_{μ^+} nicht-stationär in μ^+ ist. $\square$

Sei $\kappa > \omega$ regulär, $E \in \kappa$ stationär.

$\Diamond_\kappa$ (E): Es ex. eine Folge $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$, so dass
 $S_\alpha \subseteq \alpha$ für alle $\alpha \in E$ und wenn $X \subseteq \kappa$,
 dann ist $\{\alpha \in E \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$ stationär in κ .

$$\underline{\underline{\Diamond_\kappa}} := \Diamond_\kappa(\kappa)$$

$$\underline{\underline{\Diamond}} := \Diamond_{\omega_1}$$

Beobachtung: $\Diamond_\kappa(E)$ ist eine starke Form von $2^{<\kappa} = \kappa$.

Denn $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ erfüllt $\Diamond_\kappa(E)$. Sei $X \subseteq \kappa$. Dann ex.
 ein $\alpha < \kappa$ mit $X \cap \alpha = S_\alpha$.

Satz Sei $\kappa > \omega$ regulär. Es gelte GCH und $\Diamond_{\kappa^+}(E)$
 für $E = \{\alpha \in \kappa^+ \mid cf(\alpha) = \kappa\}$. Dann ex. ein κ^+ -starkes Baum.

Satz Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Es gelte $\Diamond_{\kappa^+}^{<\omega} \neq \Diamond_\kappa$.
 Dann ex. ein κ^+ -starkes Baum.

Beweis: Vorlesung letztes Semester.

Wir werden im Folgenden sehen, dass auch schon
 $\square_\kappa$, $2^{\kappa\kappa} = \kappa$ und $2^\kappa = \kappa^+$ reicht, um einen
 κ^+ -Junk-Baum zu konstruieren.

Sei $\kappa > \omega$ regulär, $E \subseteq \kappa$.

$\square_\kappa^*(E)$: Es ex. $\{S_\alpha \mid \alpha \in E\}$ mit

- (i) $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \alpha$
- (ii) für alle $S \subseteq \kappa$ ex. club $C \subseteq \kappa$ mit
 $S \cap \alpha \in S_\alpha$ für alle $\alpha \in C \cap E$

$\square_\kappa'(E)$: Es ex. $\{S_\alpha \mid \alpha \in E\}$ mit

- (i) $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \alpha$
- (ii) für alle $S \subseteq \kappa$ ist
 $\{\alpha \in E \mid S \cap \alpha \in S_\alpha\}$ stationär in κ .

Beobachtung: Ist E stationär in κ , so gilt

$$\square_\kappa^*(E) \rightarrow \square_\kappa'(E).$$

Satz Sei $\kappa > \omega$ regular, $E \subseteq \kappa$.

Dann gilt $\square_\kappa(E)$ genau dann, wenn $\square'_\kappa(E)$ gilt.

Beweis: ' $\rightarrow$ ' ist trivial.

' $\leftarrow$ ': Sei $\square'_\kappa(E)$ gegeben durch $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$. Sei

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \kappa \times \kappa \rightarrow \kappa$ Bijektion und $D = \{ \alpha < \kappa \mid \langle \cdot, \cdot \rangle : \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha \text{ Bijektion} \}$.

Sei $\langle S_\alpha^\dagger \mid \gamma < \alpha \rangle$ Aufzählung von $S_\alpha \cup \{\emptyset\}$.

Für $\alpha \in E$ setze $T_\alpha^\dagger = \{ \beta < \alpha \mid \langle \beta, \gamma \rangle \in S_\alpha^\dagger \}$.

Wir zeigen: Es ex $\gamma < \kappa$ mit $\langle T_\alpha^\dagger \mid \alpha \in E \rangle$ ist $\square_\kappa(E)$ -Folge.

Damit sind wir fertig.

Ang. nicht. Dann ex. für alle $\gamma < \kappa$ ex $A_\gamma \subseteq \kappa$ und $C_\gamma \subseteq \kappa$,

so dass für alle $\alpha \in C_\gamma \cap E$ $A_\gamma \cap \alpha \neq T_\alpha^\dagger$ gilt (+).

Setze $C = \bigcap_{\gamma < \kappa} C_\gamma$. Dann ist C club κ . Setze

$A = \{ \langle \beta, \gamma \rangle \mid \beta \in A_\gamma \}$. Da $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$ eine $\square'_\kappa(E)$ -Folge ist,

gibt es ein $\alpha \in C \cap E$ mit $A \cap \alpha \in S_\alpha$. Sei etwa $A \cap \alpha = S_\alpha^\dagger$.

Dann ist $A_\gamma \cap \alpha = \bigcap_{\kappa \in D} \{ \beta < \alpha \mid \langle \beta, \gamma \rangle \in A \cap \alpha \} = T_\alpha^\dagger$. Das ist

aber ein Widerspruch zu (+), da $\alpha \in C_\gamma$ ist.

□

Satz (Gregory - Shelah)

Sei $\kappa \geq \omega$ und $\omega \leq p \leq \kappa$ regulär mit $p \neq cf(\kappa)$.

Es gelte $2^{<\kappa} = \kappa$ und $2^\kappa = \kappa^+$. Dann gilt

$$\diamond_{\kappa^+}^*(E_p) \text{ für } E_p = \{\alpha < \kappa^+ \mid cf(\alpha) = p\}.$$

Beweis: Setze $\tau = \kappa^+$. Und sei gemäß $2^\kappa = \kappa^+$ $\langle B_i \mid i < \tau \rangle$ eine Aufzählung aller beschränkten Teilmengen von τ . Setze

$D = \{\alpha < \kappa^+ \mid \kappa \leq \alpha \text{ und } \forall i < \alpha \ B_i \subseteq \alpha\}$. Dann ist D club in τ . Abgeschlossenheit ist klar. Für die Unbeschränktheit definiere zu α_0 eine Folge $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ mit $\forall i < \alpha_n \ B_i \subseteq \alpha_{n+1}$.

Dann ist $\alpha_\omega = \sup \{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in D$. Es genügt $\diamond_{\tau}^*(D \cap E_p)$

zu zeigen:

1. Fall: $p < cf(\kappa)$.

Für $\alpha \in D \cap E_p$ setze $S_\alpha = \left\{ \bigcup \{B_i \mid i \in \alpha\} \mid q \leq \alpha, |\alpha| \leq p \right\}$.

Dann ist $|S_\alpha| \leq |\alpha|^p \leq \kappa$ wegen $2^{<\kappa} = \kappa$ und $p < cf(\kappa)$.

Also gilt (i). Für (ii) sei $S \subseteq \tau$. Setze

$$C = \{\alpha \in D \mid \forall i < \alpha \ \exists j < \alpha \ S \cap j = B_i\}.$$

Dann ist C abz $\wedge \tau$. Und es gilt $\alpha \in C \cap E_f \rightarrow S \cap \alpha \in S_\alpha$.

Denn sei $\alpha = \sup_{j \in J} \alpha_j \in C \cap E_f$ mit $\alpha_j < \alpha$. Dann wähle

nach $\alpha \in C$ $i(f) < \alpha$ mit $S \cap \alpha_j = B_{ij}$. Für diese gilt

$$S \cap \alpha = \bigcup_{j \in J} S \cap \alpha_j = \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in S_\alpha.$$

2. Fall: $cf(\kappa) < \mathfrak{f}$

Für $\alpha \in D$ sei $\alpha = \bigcup \{A(\alpha, \gamma) \mid \gamma < cf(\kappa)\}$ mit

$$\gamma \leq \delta \rightarrow A(\alpha, \gamma) \subseteq A(\alpha, \delta)$$

und $|A(\alpha, \gamma)| < \kappa$. [Für $\alpha = \kappa$ wähle aufsteigende Folge

$\langle \alpha_j \mid j \in cf(\kappa) \rangle$ mit $\sup_{j \in cf(\kappa)} \alpha_j = \kappa$ und setze $A(\alpha, \gamma) = \alpha_\gamma$.

Für $\alpha \neq \kappa$ benutze zusätzlich Bijektion $\alpha \leftrightarrow \kappa$].

Für $\alpha \in D \cap E_f$ setze

$$S_\alpha = \left\{ \bigcup_{i \in \alpha} B_i \mid \alpha \subseteq A(\alpha, \gamma) \text{ für ein } \gamma < cf(\kappa), | \alpha | \leq \mathfrak{f} \right\}.$$

Dann gilt $|S_\alpha| \leq \sum_{\gamma < cf(\kappa)} |A(\alpha, \gamma)|^{\mathfrak{f}} \leq \kappa$ ist, da $2^{<\kappa} = \kappa$.

Setze wieder $C = \{\alpha \in \mathcal{O} \mid \nexists \gamma < \alpha \exists i < \alpha S_{i\gamma} = B_i\}$.

Dann gilt $\alpha \in C \cap E_f \rightarrow S_{i\alpha} \in S_\alpha$. Dann sei wieder $\alpha = \sup_{j \in f} \alpha_j$ mit $\alpha_j < \alpha$ und $S_{i\alpha_j} = B_{i(j)}$ mit $i(j) < \alpha$. Wegen $f \neq \emptyset$ ex. unbeschränktes $b \in f$ und $f \leq \gamma(\alpha)$ mit $j \in b \rightarrow i(j) \in A(\alpha, f)$.

Also $S_{i\alpha} = \bigcup \{S_{i\alpha_j} \mid j \in b\} = \bigcup \{B_{i(j)} \mid j \in b\} \in S_\alpha$.

□

Korollar Sei $\kappa > \omega$ Kardinalzahl. Es gelte Π_κ , $2^{<\kappa} = \kappa$ und $2^\kappa = \kappa^+$. Dann ex. ein κ^+ -starkes Baum.

Beweis: Nach dem Satz folgt aus $2^{<\kappa} = \kappa$ und $2^\kappa = \kappa^+$, dass $\square_{\kappa^+}$ gilt. Nach einem früheren Satz folgt aber aus $\square_{\kappa^+}$ und $\square_\kappa$ die Existenz eines κ^+ -starken Baumes.

□

Es gibt die verschiedensten Variationen von $\diamond$ und $\square$.

Außerdem kann man $\diamond$ und $\square$ auf verschiedene Arten kombinieren.

Als Beispiel sei hier $\boxtimes(\kappa)$ vorgestellt.

$\boxtimes(u)$: Es ex. Folgen $\{C_v \mid v \in \text{Lih } u\}$ und $\{S_v \mid v \in \text{Lih } u\}$

mit : (a) $C_v \in \text{Lih } v$ ist abgeschlossen.

(b) $f(v) \geq \omega \rightarrow \text{sep}(C_v) = v$.

(c) $\lambda \in C_v \rightarrow C_v \cap \lambda = C_\lambda$

(d) $S_v \in v$

(e) $\lambda \in C_v \rightarrow S_v \cap \lambda = S_\lambda$

(f) Ist $x \in u$, $C \in u$ club und $\mu \in u$ regulär,
dann gibt es ein $v \in u$ mit $f(v) = \mu$, $C_v \in C$
und $X \cap v = S_v$.

Satz Es gelte $\boxtimes(u)$. Sei $\mu \in u$ regulär mit $\tau^+ \in u$
für alle $\tau \in u$. Dann ex. ein μ -abg. u -Swk-Baum
mit Pseudozweig.

Beweis: ~~Sei~~ Sei $\boxtimes(u)$ gegeben durch $\{C_v \mid v \in \text{Lih } u\}$ und

$\{S_v \mid v \in \text{Lih } u\}$. Wir konstruieren den gesuchten u -Baum

$T = \langle u, \leq_T \rangle$ rekursiv. Gleichzeitig konstruieren wir den

Pseudozweig $\{\vec{x}_\alpha \mid \alpha \in u\}$. Dabei gewährleisten wir :

(A) jedes $t \in T$ hat zwei direkte Nachfolger.

(B) $\lambda \in C_v \rightarrow x_\lambda(h) \leq_T x_v(h)$ für alle $h \in U$

(C) T ist μ -abg.

Zusätzlich konstruieren wir für $t \in T_\alpha$, $\alpha < v$, $\alpha \in L_h$, ein Element $t(v) \in T_v$ mit

(D) $t <_T t(v)$

(E) $\alpha < \lambda$, $\lambda \in C_v \rightarrow t(\lambda) <_T t(v)$.

Setze $T_0 = U$ und $x_0 = h$.

Im Nachfolgerschritt definiere für jedes $x \in T_\alpha$ zwei Nachfolger in $T_{\alpha+1}$. Wähle $\vec{x}_{\alpha+1}$ so, dass $\vec{x}_{\alpha+1}(h) \geq_T \vec{x}_\alpha(h)$ für alle $h \in U$ gilt.

Im Limeschritt unterscheiden wir zwei Fälle. Sei zunächst

$\text{Alt sup}(C_v) = v$. Dann ist für $t \in T_\alpha$, $\alpha < v$, $b(t, v) =$

$\{t(\lambda) \mid \alpha < \lambda, \lambda \in C_v\}$ eine korfigale Kette. Wir wählen

hierfür einen Nachfolger $\bar{t}$ und setzen $\bar{t} = t(v)$. Außerdem

ist für $h \in U$ wegen (B) $b(h) = \{x_\lambda(h) \mid \lambda \in C_v\}$ eine Korfigale

Kette. Wähle hierfür Nachfolger t_n und setze $\vec{x}_v = \langle t_n \mid n \in \omega \rangle$.
 Dann ist $\langle \vec{x}_v \mid \alpha \leq v \rangle$ ein Pseudozweig. Ist $cf(v) \geq \mu$, so
 sind dies alle Zweige, die wir fortsetzen. Ist $cf(v) < \mu$,
 so setzen wir alle Zweige fort. Das macht noch
 Voraussetzung T_v nicht zu groß.

Sei nun $\lambda = \sup(C_v) \leq v$. Also $cf(v) = \omega$.

Für $t \in T_{<v} = \bigcup \{T_\eta \mid \eta < v\}$ setze

$$\tilde{t} = \begin{cases} \text{ein } t' \in S_t \text{ mit } t^\perp \leq_\tau t' & \text{falls ex.} \\ t & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zuerst konstruieren wir $t(v)$:

Ist $t \in T_{<\lambda}$, so wähle einen konfiguralen Zweig b mit
 $\tilde{t}(\lambda) \in b$. Gebe diesem den Nachfolger $t(v)$. Ist $t \notin T_{<\lambda}$,
 so wähle konfiguralen Zweig b mit $\tilde{t} \in b$ und definiere
 $t(v)$, so dass $t(v)$ über b liegt. Wir müssen noch
 $\vec{x}_v$ definieren. Wähle nach Rekursionsvoraussetzung monotone
 Folge $\langle n_i \mid i \in \omega \rangle$, $n_i \in \omega$ mit $n_0 = 0$ und

$$x_{\lambda_i}(\alpha) <_\tau x_{\lambda_{i+1}}(\alpha) \text{ für alle } \alpha \geq n_{i+1}.$$

Sei $t_n = x_{\lambda_i}(u)$ mit $\kappa_i \leq u < \kappa_{i+1}$. Wähle konfiguralen Zweig c_n mit $t_n \in c_n$, und sei $x_v(u)$ ~~der~~^{ein} Nachfolger von c_n .

Dann ist $\langle \bar{x}_\alpha \mid \alpha \leq v \rangle$ ein Pseudozweig, da $u \geq \kappa_i$:

$\longrightarrow x_{\lambda_i}(u) <_T x_v(u)$. Ist $\mu = u$, so sei dies ganz T_v .

Ist $u < \mu$, so setze alle Zweige von $T_{<\mu}$ fort.

Nur müssen noch zeigen, dass T ^{ein} κ -Suslin Baum ist.

Sei dann $A \in T$ eine maximale Antikette. Setze

$C = \{ \alpha < \kappa \mid A \cap \alpha \text{ maximale Antikette in } T_{<\alpha} \}$. Dann ist

C club in κ . Die Abgeschlossenheit ist klar. Für die

Unbeschränktheit definiere für $\alpha_0 \in \kappa$ rekursiv $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$, so

dass $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ ist und jedes Element aus $T_{<\alpha_n}$

mit einem Element aus $A \cap T_{<\alpha_{n+1}}$ vergleichbar ist. Dann

ist $\alpha = \sup \{ \alpha_n \mid n \in \omega \} \in C$.

Nach (f) aus $\square(\kappa)$ wähle $v < u$ mit $cf(v) = \mu$, $C_v \subseteq C$

und $A \cap v = S_v$. Dann ist nach (e) $A \cap \lambda = S_\lambda$ für

alle $\lambda \in C_v$.

Wir zeigen: Sei $s \in T_v$. Dann ex. $\bar{s} \in A$ mit $\bar{s} <_T s$. (*)

Das genügt, da dann $A = A \cap T_v$.

Ist $\sup(C_v) < v$, so gilt (*) nach Konstruktion.

Sei also $\sup(C_v) = v$. Wegen $\ell(v) = \mu$ ist dann nach Konstruktion $s = \ell(v)$ für ein $t \in T_{\leq v}$ oder $s = x_v(t)$ für

ein t . Sei zuerst $s = \ell(v)$ mit $t \in T_\alpha$. ~~Dann ist $\sup(C_v) < \lambda$~~

Wähle $\lambda \in C_v$, $\lambda > \alpha$, λ Nachfolgerelement von α . Dann

ist $\sup(C_\lambda) < \lambda$, da $C_\lambda = C_v \cap \lambda$ ist. Außerdem ist

$\lambda \in C$ (da $C_v \subseteq C$) und $A \cap \lambda = S_\lambda$. Insbesondere ist S_λ

eine maximale Antikette in $T_{\leq \lambda}$. Nach Konstruktion ex.

aber dass $\bar{s} \in A$ mit $\bar{s} <_T \ell(\lambda)$. Aber $\ell(\lambda) <_T \ell(v)$. Also

bed. wir folg. ist $s = x_v(t)$, so verläuft das Argument

analog. $\square$

Im Zusammenhang mit Kuratowski-Bäumen betrachten wir die folgende Verstarbung von $\Diamond_{\kappa}^*$ für reguläre $\kappa > \omega$.

$\Diamond_{\kappa}^+$: Es ex. $\langle S_{\alpha} \mid \alpha \in \kappa \rangle$ mit

$$(i) \quad S_{\alpha} \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \quad \text{und} \quad |S_{\alpha}| \leq \alpha$$

(ii) für alle $S \subseteq \kappa$ ex. club $C \subseteq \kappa$, so dass für alle $\alpha \in C$ sowohl $S \cap \alpha \in S_{\alpha}$ als auch $C \cap \alpha \in S_{\alpha}$ gilt.

Satz Es gelte $\Diamond_{\kappa}^+$. Dann ex. ein κ^+ -Kuratowski Baum.

Beweis: Wir zeigen die Existenz einer κ^+ -Kuratowski Familie.

Sei $H_{\kappa^+} = \{x \mid \text{card}(TC(x)) \leq \kappa\}$. Wähle eine Folge

$\langle M_{\alpha} \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ mit $M_{\alpha} \subseteq H_{\kappa^+}$ (elementare Substruktur),
 $|M_{\alpha}| \leq \kappa$

und $(\alpha+1) \cup \bigcup \{S_{\beta} \mid \beta \leq \alpha\} \subseteq M_{\alpha}$. Dabei sei

$\langle S_{\alpha} \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ eine $\Diamond_{\kappa}^+$ -Folge.

Sei $\bar{F} = \{x \in \kappa^+ \mid x \cap \alpha \in M_{\alpha} \text{ für alle } \alpha < \kappa^+\}$.

Wir zeigen $|F| = \kappa^+$.

Bzg. $|F| = \kappa^+$. [Es gilt $|F| \geq \kappa^+$, da $\{\alpha\} \in F$
für alle $\alpha \in \kappa^+$.]

Sei $\langle x_v \mid v \in \kappa^+ \rangle$ eine Aufzählung der ~~unbeschränkten~~ Elemente von F . Für $v \in \kappa^+$ sei

$$B_v = \{ \alpha \in \kappa^+ \cap \text{Lim} \mid x_v \cap \alpha \text{ ist unbeschränkt in } \alpha \}$$

Dann ist B_v stets club in κ^+ . Sei

$$B = \{ \alpha \in \kappa^+ \cap \text{Lim} \mid \alpha \in B_v \text{ für alle } v < \alpha \},$$

Das ist der diagonale Durchschnitt. Also ist B club in κ^+ .

Da $\langle S_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ eine $\Delta_{\kappa^+}^+$ -Folge ist, ex. es $\overset{\text{club}}{r} C \subseteq \kappa^+$

mit $B \cap \alpha, C \cap \alpha \in S_\alpha$ für alle $\alpha \in C$. Sei $\langle \alpha_v \mid v \in \kappa^+ \rangle$ die

minimale Aufzählung von $\{ \alpha \in B \mid \alpha = \sup(C \cap \alpha) \}$. Für $v \in \kappa^+$ setze

$$\beta_v = \min(C - (\alpha_v + 1)). \text{ Also ist } \alpha_v < \beta_v < \alpha_{v+1}. \text{ Sei } x = \{ \beta_v \mid v \in \kappa^+ \}.$$

Für alle $v \in \kappa^+$ gilt $v \leq \alpha_v < \alpha_{v+1} \in B$, Also ist $x \cap \alpha_{v+1}$ unbeschränkt

in α_{v+1} . Aber $x \cap \alpha_{v+1} = \{ \beta_\tau \mid \tau \leq v \} \subseteq \beta_{v+1} + 1 < \alpha_{v+1}$. Somit ist

$x \neq x_v$ für alle $v \in \kappa^+$. Wir werden zeigen, dass $x \in F$ ist.

↗

Sei $\beta \leq \alpha$ der größte Limespunkt von $x \cap \alpha$.

Da sich $x \cap \alpha$ und $x \cap \beta$ nur an endlich viele

Punkte unterscheiden und $M_\alpha \models ZF^-$, steht es $x \cap \beta \in M_\alpha$

zu zeigen. Weil β ein Limespunkt von $x \cap \beta$, $x \in C$ und

C abgeschlossen, gilt $\beta \in C$. Also ist $B \cap \beta, C \cap \beta \in J_\beta \subseteq M_\alpha$.

Sei λ so, dass $\beta = \sup \{\beta_v \mid v < \lambda\}$. Dann ist

$\{\alpha_v \mid v < \lambda\} = \{\alpha \in B \cap \beta \mid \alpha = \sup \{(C \cap \beta) \cap \alpha\}\}$. Also ist

$\{\alpha_v \mid v < \lambda\} \in M_\alpha$ wegen $B \cap \beta, C \cap \beta \in M_\alpha \models ZF^-$. Aber

für $v < \lambda$ $\beta_v = \min((C \cap \beta) - (\alpha_v + 1))$. Somit ist $x \cap \beta =$
 $\{\beta_v \mid v < \lambda\} \in M_\alpha$. $\square$

Wir wollen im Folgenden die relative Mostowski von $\diamond_{\kappa^+}^+$
 für die $\kappa > \omega$ zeigen. Dazu zeigen wir, dass $\diamond_{\kappa^+}^+$ in

L gilt. Eine kurze Wiederholung von L :

Sei die Sprache S mit nur eben 2-stelligen Relativsymbol $\in$
 gegeben. Sei $FnL(\in)$ die wie üblich rekursiv definierte Menge der
 Formeln dieser Sprache.

~~Definieren~~

Sei $X \in V$. Eine Teilmenge $a \subseteq X$ heißt definierbar ^{über} X , falls es $\varphi(x, \vec{z}) \in \text{Fml}(\dot{c})$ und $\vec{a} \in X^{<\omega}$ gibt mit

$$a = \{b \in X \mid X \models \varphi(b, \vec{a})\}.$$

Sei $\text{Def}(X)$ die Menge aller ^{über} X definierbaren Teilmengen.

Definiere $L_0 = \emptyset$

$$L_{\alpha+1} = \text{Def}(L_\alpha)$$

$$L_\lambda = \bigcup \{L_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \quad \text{für } \lambda \in L_{\text{lin}}$$

$$L = \bigcup \{L_\alpha \mid \alpha \in O_L\}.$$

Dann ist L ein inneres Modell.

D.h. es gilt $\text{ZF} \vdash \varphi^L$ für alle ZF-Axiome φ .

Sogar $\text{ZF} \vdash (\text{AC})^L$. Außerdem ist $\text{ZF} \vdash (V=L)^L$.

Der Beweis von AC in L beruht auf der Existenz definierbarer Wohlordnungen $<_\alpha$ von L_α für $\alpha \in L_{\text{lin}}$.

Die Definition von L_α ist uniform. D.h. es gibt eine Formel $\varphi \in \text{Fml}(\dot{c})$, so dass für alle $\alpha \in L_{\text{lin}}$

$$x <_\alpha y \iff L_\alpha \models \varphi(x, y) \quad \text{glt.}$$

Wegen $\prec_\alpha$ ex. auch kleinste elementare Substrukturen von L_α .

(schreibe $\mathcal{L} \prec \alpha$)

Eine Substruktur $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}_\alpha$ heißt elementar, wenn

für alle $\varphi \in \text{Fn}(\mathbb{E})$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\mathcal{O}_\alpha \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{L} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Definiere für $\alpha \in \text{Lim}$ die Skolemfunktionen $h_\alpha^\varphi: L_\alpha^n \rightarrow L_\alpha$

$$h_\alpha^\varphi(a_1, \dots, a_n) := \begin{cases} \text{das begl. } \prec_\alpha \text{ kleinste } x \text{ mit } L_\alpha \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n), \\ \text{falls dieses ex.} \\ \emptyset \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lemma Sei $\alpha \in \text{Lim}$ und $X \subseteq L_\alpha$ abgeschlossen unter allen Skolemfunktionen h_α^φ . Dann ist $X \prec L_\alpha$.

Beweis durch Induktion über den M der Formeln.

Sei $H_\alpha(X)$ der Abschlu^{ss} von X unter allen h_α^φ .

Lemma Sei $\alpha \in \text{Lim}$, ~~und~~ $X \subseteq L_\alpha$ und $X \subseteq H \prec L_\alpha$.

Dann ist $H_\alpha(X) \subseteq H$.

Beweis: Die Idee ist folgendermaßen: Seien $x_1, \dots, x_n \in X$
 und $x = L_\alpha^q(x_1, \dots, x_n) \neq \emptyset$. Dann ist x das einzige y , das
 in L_α die Formel $\varphi(y, x_1, \dots, x_n) \wedge \forall y' \leq_\alpha y$
 $\rightarrow \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$

erfüllt. Also ist $x \in H \prec L_\alpha$. $\square$

Satz (Kondensationlemma)

Sei $\alpha \in \text{Lim}$ und $H \prec L_\alpha$. Dann ex. eindeutige π und β
 mit $\beta \leq \alpha$ und

- (i) $\pi: H \cong L_\beta$
- (ii) $y \leq x \Rightarrow \pi \upharpoonright y = \text{id} \upharpoonright y$
- (iii) $\pi(x) \prec_\alpha x$ für alle $x \in H$.

Beweis: π ist die Transfizierung von H .

$H \cong L_\beta$, denn es gibt eine Formel φ , so dass
 für transitive X mit $X \cap \alpha = \beta$ genau dann $X \models \varphi$
 gilt, wenn $X = L_\beta$. $\square$

Das typische Beispiel für eine Anwendung der Kondensations-
 lemma ist der Beweis von GCH in L :

Satz Sei $V=L$ und $\kappa > \omega$ eine Kardinalzahl. Ist dann
 $x \in L_\alpha$ für ein $\alpha < \kappa$, so ist $x \in L_\kappa$.

Beweis: Sei $x \in L_\alpha$ mit $x \in L_\alpha$. Sei $H = H_\alpha(L_\alpha \cup \{x\})$.

Dann ist $H < L_\alpha$ und $|H| = |L_\alpha| < \kappa$. Sei nach dem

Kondensationslemma $\pi: H \cong L_\beta$. Da $L_\alpha \cup \{x\}$ transitiv ist,

gilt $\pi(x) = x$. Also $x \in L_\beta$. Wegen $|H| < \kappa$ gilt $\beta < \kappa$

und damit $L_\beta \subseteq L_\kappa$. Somit $x \in L_\kappa$. $\square$

Lemma Sei $V=L$. ~~Dann gilt~~  Ist dann $\kappa \in H < L_{\kappa^+}$, so
 ist $H = L_\alpha$ für ein $\alpha \leq \kappa^+$.

Beweis: Nach dem Kondensationslemma reicht es zu zeigen, dass

H transitiv ist. Sei dann $x \in H$. Also $x \in L_\gamma$ mit $\gamma < \kappa^+$

und somit $|x| \leq \kappa$. Sei $f: \kappa \rightarrow x$ die $<_{\kappa^+}$ -kleinste
 Surjektion. Dann ist $f \in H$ wegen $x \in H$ und $H < L_{\kappa^+}$.

Aber $\kappa \in H$ und daher $x_\kappa = f[\kappa] \subseteq H$. $\square$

Satz Sei $V=L$. Dann gilt $\Diamond_{\kappa^+}^+$.

Beweis: Definiere eine Funktion $f: \kappa^+ \rightarrow \kappa^+$ durch
 $f(\alpha) =$ die kleinste Ordinalzahl ν mit $\kappa \cup \{\alpha\} \in L_\nu \wedge L_{\kappa^+}$.

Setze $S_\alpha = \mathcal{P}(\alpha) \cap L_{f(\alpha)}$.

Beachte, dass f und $\langle S_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ in L_{κ^+} definierbar
 sind. [D.h. es ex. $\varphi \in \text{Fml}(\in)$ mit $x=f \iff L_{\kappa^+} \models \varphi(x)$.]

Wir zeigen, dass $\langle S_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ $\Diamond_{\kappa^+}^+$ erfüllt.

Ang. nicht. Sei $X \subseteq \kappa^+$ bzgl. $\leq$ minimal, so dass für alle clubs
 $C \subseteq \kappa^+$ ein $\alpha \in C$ ex. mit $X \cap \alpha \not\subseteq S_\alpha$ oder $X \cap \alpha \not\subseteq S_\alpha$.

Auch X ist in L_{κ^+} definierbar.

Wir werden im Widerspruch dazu ein $C \subseteq \kappa^+$ konstruieren,
 so dass für alle $\alpha \in C$ $X \cap \alpha, C \cap \alpha \subseteq S_\alpha$ gilt.

Sei dazu $\langle N_\nu \mid \nu \in \kappa^+ \rangle$ rekursiv definiert:

$$N_0 = H_{\kappa^+}(\kappa)$$

$$N_{\nu+1} = H_{\kappa^+}(N_\nu \cup \{N_\nu\})$$

$$N_\delta = \bigcup \{N_\nu \mid \nu < \delta\} \text{ für } \delta \in L_{\kappa^+}.$$

Nach Lemma ist $N_v \cap L_{\kappa^+}$ transitiv.

Setze $\alpha_v = N_v \cap \kappa^+$

$$\pi_v : N_v \cong L_{\beta(v)}.$$

Dann gilt $\pi_v \upharpoonright L_{\alpha_v} = \text{id} \upharpoonright L_{\alpha_v}$, $\pi_v(\kappa^+) = \alpha_v$, $\pi_v(X) = X \cap \alpha_v$.

Sei C die Menge der Limespunkte von $\{\beta(v) \mid v \in \kappa^+\}$.

Zeige: $X \cap \alpha$, $C \cap \alpha \in S_\alpha$ für alle $\alpha \in C$.

Sei $\alpha := \sup \{\beta(v) \mid v < \lambda\} \in C$, d.h. $\lambda \in L_{\kappa}$.

Wir zeigen zunächst $X \cap \alpha \in S_\alpha$. Beachte dabei zuerst, dass

$\alpha_v < \beta(v) < \alpha_{v+1}$. Denn offensichtlich ist $\alpha_v < \beta(v)$. Aber

$\beta(v)$ ist ~~an~~ definierbar in L_{κ^+} mit Parameter N_v .

Also ist $\beta(v) \in N_{v+1}$ und damit $\beta(v) \in \alpha_{v+1}$. Wegen $\alpha_v < \beta(v) < \alpha_{v+1}$

gilt $\alpha = \alpha_\lambda$. Somit $X \cap \alpha = \pi_\lambda(X) \in L_{\beta(\lambda)}$. Aber $\beta(\lambda) = f(\lambda)$.

Denn $L_{f(\alpha)} \models (\text{card}(\alpha) = \kappa)$ während $\alpha = \alpha_\lambda = (\kappa^+)^{L_{\beta(\lambda)}}$.

bleibt $C \cap \alpha \in S_\alpha$ zu zeigen. Dazu reicht es $\{\beta(v) \mid v < \lambda\} \in L_{f(\alpha)}$

zu zeigen. Da $\beta := \beta(\lambda) \in L_{f(\alpha)}$ ist, können wir in $L_{f(\alpha)} \models \text{ZF}$ -

eine Folge $\langle N'_v \mid v < \lambda' \rangle$ wie folgt definieren:

$$N'_0 = H_\beta(\kappa)$$

$$N'_{v+\kappa} = H_\beta(N'_v \cup \{N'_v\})$$

$$N'_\delta = \bigcup \{N'_v \mid v < \delta\} \quad \text{für } \delta \in \text{Lim},$$

wobei die Rekursion abbricht, wenn $N'_v \notin L_\beta$.

Nach in $L_{f(\kappa)}$ kann man nun $\pi'_v: N'_v \cong L_{\beta'(v)}$ definieren.

Also ist $\langle \beta'(v) \mid v < \lambda' \rangle \in L_{f(\kappa)}$.

Da aber $\pi_\lambda: L_\beta \rightarrow N_\lambda \prec L_{\kappa+\kappa}$ eine elementare Einbettung ist, erhält man schließlich, daß $N'_v \cong N_v$ für alle $v < \lambda$ gilt.

Somit ist $\langle \beta(v) \mid v < \lambda \rangle = \langle \beta'(v) \mid v < \lambda \rangle \in L_{f(\kappa)}$.

