3. Große Kardinalzahlen

und Konsistenzstärke

Eine Kardinalzahl $\kappa > \omega$ heißt schwach unerreichbar, wenn κ eine reguläre Limeskardinalzahl ist. Und κ heißt (stark) unerreichbar, wenn außerdem $2^\lambda < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$ gilt.

offensichtlich gilt: κ schwach unerreichbar + GCH

$\longrightarrow$ κ unerreichbar.

Außerdem: κ Kardinalzahl $\longrightarrow$ $[\kappa \text{ Kardinalzahl}]^L$.

Also: κ schwach unerreichbar $\longrightarrow$ $[\kappa \text{ unerreichbar}]^L$.

Für eine $\in$-Formel φ sei $\ulcorner \varphi \urcorner$ die Gödelisierung von φ.

Für $\varphi \in Fml(\dot\in)$ sei:

$$Aus_\varphi \equiv \forall \vec{a}\, \forall x\, \exists y\, \forall z\, [z \dot\in y \longleftrightarrow z \dot\in x \wedge \varphi(z, \vec{a})]$$

$$\in Fml(\dot\in),$$

$$\text{Beschr}_\varphi \equiv \forall \vec{a}\, [\forall x\, \exists y\, \varphi(y, x, \vec{a}) \longrightarrow$$

$$\forall u\, \exists v\, (\forall x \dot\in u)(\exists y \dot\in v)\, \varphi(y, x, \vec{a})]$$

$$\in Fml(\dot\in).$$

Sei $\ulcorner ZFC \urcorner = \{ \ulcorner Ext \urcorner, \ulcorner Paar \urcorner, \ulcorner U\text{-}Ax \urcorner, \ulcorner Inf \urcorner, \ulcorner Pot \urcorner, \ulcorner Fund \urcorner \}$

$\cup \{ Aus_\varphi \mid \varphi \in Fml(\in) \} \cup \{ Ersetz_\varphi \mid \varphi \in Fml(\in) \}$.

Lemma

Sei κ unerreichbar. Dann gilt $H_\kappa = V_\kappa \models \ulcorner ZFC \urcorner$.

Beweis: Übungsaufgabe von Mengenlehre I. $\boxtimes$

Also gilt $Con(ZFC + \exists \kappa \;\; \kappa \text{ schwach unerreichbar})$

$\longrightarrow Con(ZFC + Con(ZFC))$.

Nach dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz gilt

somit $Con(ZFC) \not\rightarrow Con(ZFC + \exists \kappa \;\; \kappa \text{ unerreichbar.})$.

Für Formelmengen ϕ und ψ definiere

$$\phi \leq_{con} \psi \;\; :\Longleftrightarrow \;\; Con(\psi) \longrightarrow Con(\phi)$$

$$\phi <_{con} \psi \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \phi \leq_{con} \psi \wedge Con(\phi) \not\rightarrow Con(\psi).$$

Also $ZFC <_{con} ZFC + \exists \kappa \;\; \kappa$ unerreichbar.

Ist $\phi <_{con} \varphi$, so sagt man φ habe eine höhere Konsistenzstärke als ϕ.

Ist $\phi \leq_{con} \varphi$ und $\varphi \leq_{con} \phi$, so sagt man ϕ und φ seien äquikonsistent.

In der Mengenlehre benutzt man große Kardinalzahlen, um die Konsistenzstärke einer Aussage zu messen.
Z.B. sagt man eine Aussage φ habe als Konsistenzstärke die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl, wenn $(ZFC + \varphi)$ und $(ZFC + \exists \kappa\ \kappa \text{ unerreichbar})$ äquikonsistent sind.

Wir werden u.a. zeigen, dass dies für

$$\varphi \equiv \text{es ex. kein Kurepabaum}$$

gilt.

<u>Randbemerkung</u>: Sei ein Modell von ZFC gegeben. Dann ist es übrigens kein Problem ein Modell zu finden, in dem ein M ex. mit $M \models \ulcorner \varphi \urcorner$ für alle ZFC-Axiome φ.

<u>Beweis:</u> Zu jeder endlichen Konjunktion $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ von ZFC-Axiomen gibt es im gegebenen Modell ein α mit $V_\alpha \models \ulcorner \varphi \urcorner$ (Reflexionssatz von Levy). Arbeite nun in der Sprache $\{\in, M\}$. Also ist $ZFC + M \models \ulcorner \varphi_1 \urcorner + \ldots + M \models \ulcorner \varphi_n \urcorner$ konsistent für jeweils endlich viele ZFC-Axiome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Nach dem Kompaktheitssatz ist also auch

$$ZFC + \{ M \models \ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ ZFC-Axiom} \} \text{ konsistent.}$$

Das ist aber nach dem Vollständigkeitssatz gerade die Behauptung. $\boxtimes$

Wir wollen zeigen: Sei ω_2 nicht unerreichbar in L.

Dann ex. ein Kurepabaum.

Dazu verwenden wir eine relativierte L-Hierarchie.

Sei $A \in V$ eine Klasse. Sei $X \in V$. Eine Teilmenge $a \subseteq X$ heißt definierbar über $\langle X, A \cap X \rangle$, falls es $\varphi(x, \vec{z}) \in Fml(\dot{\in}, \dot{A})$ und $\vec{a} \in X^{<\omega}$ gibt mit

$$a = \{ b \in X \mid \langle X, A \cap X \rangle \models \varphi(b, \vec{a}) \}.$$

Sei $Def_A(X)$ die Menge aller über $\langle X, A \cap X \rangle$ definierbaren Teilmengen.

Definiere
$$L_0[A] = \emptyset$$
$$L_{\alpha+1}[A] = Def_A(L_\alpha[A])$$
$$L_\lambda[A] = \bigcup \{ L_\alpha[A] \mid \alpha \in \lambda \} \text{ für } \lambda \in Lim$$
$$L[A] = \bigcup \{ L_\alpha[A] \mid \alpha \in On \}.$$

Dann ist $L[A]$ ein inneres Modell, sogar $ZF \vdash (AC)^{L[A]}$.

Ist $A \subseteq On^{<\omega}$ bzw. $A \subseteq L$, so gilt $A \in L[A]$.

Im Allgemeinen ist dies aber falsch.

Wie für L ex. auch für $L[A]$ definierbare Wohlordnungen, Skolemfunktionen und Skolemhüllen.

Für $L[A]$ gilt folgende Form der Kondensation:

Sei $\alpha \in Lim$ und $H \prec L_\alpha[A]$. ~~Sei $\pi : H \to X$.~~ Dann ex. eindeutig bestimmte π und $\beta \in Lim$ mit $\pi : H \cong L_\beta[B]$ wobei $B = \pi[A \cap H]$. Die Abbildung π ist die Transitivierung von H.

Daraus folgt im Allgemeinen nicht GCH in $L[A]$. Einfaches Gegenbeispiel:

Gelte in V $2^\omega = \omega_2$. Wähle eine Aufzählung $\langle x_\alpha \mid \alpha \in \omega_2 \rangle$ von $P(\omega)$. Dann ist $L[\langle x_\alpha \mid \alpha \in \omega_2 \rangle] \models 2^\omega = \omega_2$.

Ist allerdings $A \subseteq \omega_1$ und $V = L[A]$ so gilt

GCH: Sei dazu $\kappa > \omega$ eine Kardinalzahl. Wir zeigen, dass dann $x \in L_\kappa[A]$ für alle $x \subseteq L_\alpha[A], \alpha < \kappa$ gilt. Sei $x \in L_\lambda[A]$ mit $\lambda > \omega_1$, $\lambda \in Lim$. ~~Dann ist~~ Sei $H = H_\lambda(L_\alpha[A] \cup \{x\})$. Dann ist $H \prec L_\lambda[A]$ und $|H| = |L_\alpha[A]| < \kappa$. Außerdem ist $H \cap \omega_1$ transitiv. Also gilt nach dem Kondensationslemma $\pi : H \cong L_\beta[B]$ mit $B = A \cap \pi(\omega_1)$. Da $L_\alpha[A] \cup \{x\}$ transitiv ist, gilt $\pi(x) = x$. Also $x \in L_\beta[B] \subseteq L_\beta[A]$.

Wegen $|H| < \kappa$ gilt aber $\beta < \kappa$ und damit $L_\beta[A] \subseteq L_\kappa[A]$.

Somit $x \in L_\kappa$.

Also: Ist $V = L[A]$ und $A \subseteq L_{\omega_1}[A]$, so gilt $L_\kappa[A] = H_\kappa^{L[A]}$ und daher $L_\kappa[A] \models ZF^-$ für alle regulären $\kappa > \omega$.

Sei nun $\kappa = \omega_2$ nicht unerreichbar in L. Dann kann man leicht ein A definieren mit $A \subseteq L_{\omega_1}[A]$, $\omega_1^{L[A]} = \omega_1$ und $\omega_2^{L[A]} = \omega_2$. Denn aufgrund der Erreichbarkeit von κ in L ex. ein $\Theta < \kappa$ mit $\kappa = (\Theta^+)^L$. Sei $A_0 \subseteq \omega_1 \times \omega_1$ eine Wohlordnung von ω_1 mit Ordnungstyp Θ. Sei außerdem für jedes $\lambda \in$ [illegible] $\cap\, \omega_1$ $A_\lambda : \omega \to \lambda$ eine Surjektion. Setze $A_1 = \langle A_\lambda \mid \lambda \in$ [illegible] $\cap\, \omega_1 \rangle$.

Setze weiter $A = (\{0\} \times A_0) \cup (\{1\} \times A_1)$.

Dann gilt $A \subseteq L_{\omega_1}[A]$ (leichte Induktion). Aufgrund der Definition von A_1 gilt $\omega_1^{L[A]} = \omega_1$. Und da $L[A] \models ZFC$, kann man in $L[A]$ die Transitivierung von A_0 bilden und erhält somit $\omega_2^{L[A]} = \omega_2$.

<u>Satz</u> Sei $V = L[A]$ und $A \subseteq L_{\omega_1}[A]$.

Dann gilt $\diamondsuit^+_{\kappa^+}$ für alle $\kappa \geq \omega$.

<u>Beweis:</u> Definiere Funktion $f: \kappa^+ \to \kappa^+$ durch

$f(\alpha) :=$ die kleinste Ordinalzahl ν mit $\kappa \cup \{\alpha\} \subseteq L_\nu[A] \prec L_{\kappa^+}[A]$.

Setze $S_\alpha = \mathcal{P}(\alpha) \cap L_{f(\alpha)}[A]$.

Wir zeigen, dass $\langle S_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ $\diamondsuit^+_{\kappa^+}$ erfüllt.

Ang. nicht. Sei $X \subseteq \kappa^+$ bzgl. $<_{L[A]}$ minimal, so dass für alle clubs $C \subseteq \kappa^+$ ein $\alpha \in C$ ex. mit $X \cap \alpha \notin S_\alpha$ oder $C \cap \alpha \notin S_\alpha$.

Dann sind $f, \langle S_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle, X$ in $L_{\kappa^{++}}[A] \models ZF^-$ definierbar.

Für Widerspruch konstruiere $C \subseteq \kappa^+$ mit $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in S_\alpha$

für alle $\alpha \in C$.

Sei dann $\langle N_\nu \mid \nu \in \kappa^+ \rangle$ definiert durch

$$N_0 = H_{L_{\kappa^{++}}[A]}(\kappa)$$

$$N_{\nu+1} = H_{L_{\kappa^{++}}[A]}(N_\nu \cup \{N_\nu\})$$

$$N_\delta = \bigcup \{N_\nu \mid \nu < \delta\} \text{ für } \delta \in Lim.$$

Dann ist $N_\nu \cap L_{\kappa^+}[A]$ transitiv.

Setze $\alpha_\nu = N_\nu \cap \kappa^+$

$\pi_\nu : N_\nu \cong L_{\beta(\nu)}[B_\nu]$ wobei $B_\nu = A \cap L_{\alpha_\nu}[A]$.

Es gilt $\pi_\nu \upharpoonright L_{\alpha_\nu}[A] = id \upharpoonright L_{\alpha_\nu}[A]$, $\pi_\nu(\kappa^+) = \alpha_\nu$, $\pi_\nu(X) = X \cap \alpha_\nu$.

Sei C die Menge der Limespunkte von $\{\beta(\nu) \mid \nu \in \kappa^+\}$.

<u>Zeige:</u> $X \cap \alpha, C \cap \alpha \in S_\alpha$ für alle $\alpha \in C$.

Sei $\alpha := \sup\{\beta(\nu) \mid \nu < \lambda\} \in C$, d.h. $\lambda \in Lim$.
Dann ist $\alpha = \alpha_\lambda$. Somit $X \cap \alpha = \pi_\lambda(X) \in L_{\beta(\lambda)}[B_\lambda] = L_{\beta(\lambda)}[A \cap L_{\alpha_\lambda}[A]]$.

Können wir also $\beta(\lambda) < f(\alpha)$ zeigen, so sind wir fertig.

Wir unterscheiden zwei Fälle

<u>1. Fall</u> ex. α_0 mit $L_{\kappa^+}[A \cap L_{\alpha_0}[A]] \models \alpha_0^+ = \kappa^+$.

Dann können wir ohne E. annehmen, dass $\alpha_0 < \alpha$.

Denn sonst definiere $C = C - (\alpha_0 + 1)$.

Also gilt $L_{f(\alpha)}[A \cap L_\alpha[A]] \models \operatorname{card}(\alpha) = \kappa$, denn

$L_{f(\alpha)}[A] \prec L_{\kappa^+}[A]$ und damit $L_{f(\alpha)}[A \cap L_\alpha[A]] \prec L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]]$

(Übung!). Aber $L_{\beta(\alpha)}[A \cap L_\alpha[A]] \models \alpha = \kappa^+$ wegen

$\pi_\alpha(\kappa^+) = \alpha$ und $\pi_\alpha(\kappa) = \kappa$, π_α elementar.

Somit $\beta(\alpha) < f(\alpha)$.

<u>2. Fall</u> ex. kein α_0 mit $L_{\kappa^+}[A \cap L_{\alpha_0}[A]] \models \alpha_0^+ = \kappa^+$

Dann gilt insbesondere $(\alpha^+)^{L_{\kappa^+}[A \cap L_{\alpha}[A]]} < \kappa^+$.

Also ist $(\alpha^+)^{L_{\kappa^+}[A \cap L_{\alpha}[A]]} \in L_{f(\alpha)}[A]$, denn $(\alpha^+)^{L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]]}$

ist definierbar in $L_{\kappa^+}[A]$. Also ist $(\alpha^+)^{L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]]} < f(\alpha)$.

Aber $\beta(\lambda) < (\alpha^+)^{L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]]}$.

Denn in $L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]]$ läßt sich rekursiv die folgende Folge $\langle N'_\nu \mid \nu < \lambda \rangle$ definieren:

$$N'_0 = H_{L_{\beta(\lambda)}[A \cap L_\alpha[A]]}(\kappa)$$

$$N'_{\nu+1} = H_{L_{\beta(\lambda)}[A \cap L_\alpha[A]]}(N'_\nu \cup \{N'_\nu\})$$

$$N'_\delta = \bigcup \{N'_\nu \mid \nu < \delta\} \quad \text{für } \delta \in \text{Lim}.$$

Da $L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]] \models ZF^-$ und $\lambda \leq \alpha$ kann man induktiv $L_{\kappa^+}[A \cap L_\alpha[A]] \models \text{card}(N'_\nu) = \alpha$ und $N'_\nu \cong N_\nu$ für alle $\nu \in \lambda$ zeigen.

Das zeigt auch $\{\beta(\nu) \mid \nu < \lambda\} \in L_{f(\alpha)}[A]$.

Daraus folgt $C \cap \alpha \in S_\alpha$.

$\boxtimes$

<u>Satz</u> Sei ω_2 nicht unerreichbar in L.

Dann ex. ein Kurepabaum.

<u>Beweis:</u> Sei A so, dass $A \subseteq L_{\omega_1}[A]$, $\omega_1^{L[A]} = \omega_1$ und $\omega_2^{L[A]} = \omega_2$. Dann gilt $\Diamond^+_{\omega_1}$ in $L[A]$. Also ex. in $L[A]$ ein Kurepabaum. Dieser ist auch ein Kurepabaum in V. ▨

Wir wollen nun umgekehrt zeigen: Ex. eine unerreichbare Kardinalzahl, so gibt es eine generische Erweiterung in der kein Kurepabaum ex.

Also: Dass kein Kurepabaum ex., ist zur Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl äquikonsistent.

Dazu benutzen wir den Levy-Kollaps. ~~...~~ Sei λ unerreichbar. Sei $\kappa < \lambda$ regulär. Betrachte folgendes Forcing: $(\mathbb{P}, \leq)$:

Bedingungen $p \in \mathbb{P}$ sind Funktionen mit

(1) $\mathrm{dom}(p) \subseteq \lambda \times \kappa$

(2) $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$

(3) $p(\alpha, \xi) < \alpha$ für alle $\langle \alpha, \xi \rangle \in \mathrm{dom}(p)$.

Sei $p \leq q$ gdw $p \supseteq q$.

Offensichtlich ist $\mathbb{P}$ κ-abgeschlossen. Also erhält es die Kardinalzahlen und Konfinalitäten $\leq \kappa$. Außerdem fügt es keine neuen Folgen $\langle x_\alpha \mid \alpha \in \delta \rangle$ mit $\delta < \kappa$, $x_\alpha \in V$ hinzu.

Sei G $\mathbb{P}$-generisch. Dann ist $G : \cancel{\kappa \times \lambda}\ \lambda \times \kappa \longrightarrow V$.

Sei $g_\alpha : \kappa \longrightarrow \alpha$, $\xi \longmapsto G(\alpha, \xi)$. Dann ist g_α eine Surjektion. Also gilt $V[G] \models |\alpha| \leq |\kappa|$ für alle $\alpha < \lambda$.

Schließlich erfüllt $\mathbb{P}$ die λ-AB. Denn sei $W \subseteq \mathbb{P}$ und $|W| = \lambda$. Dann ex. nach Δ-System-Lemma ein $W' \subseteq W$ mit $|W'| = \lambda$ und $\Delta \subseteq \lambda \times \kappa$, so dass für alle $p \neq q \in W'$ $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = \Delta$ gilt. Wegen (2) gilt $|\Delta| < \kappa$. Da λ unerreichbar ist, ist daher

$$|\{ p : \Delta \longrightarrow V \mid p(\alpha, \xi) < \alpha \text{ für alle } (\alpha, \xi) \in \Delta \}| < \lambda.$$

Also gibt es nach Schubfachprinzip ein $W'' \subseteq W$ mit $|W''| = \lambda$, so dass $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = \Delta$ und $p \restriction \Delta = q \restriction \Delta$ für alle $p \neq q \in W''$ gilt. Zwei solche Bedingungen sind aber kompatibel.

Dabei haben wir folgende Version des Δ-System-Lemmas verwendet:

Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Sei $\Theta > \kappa$ regulär und gelte $\forall \alpha < \Theta\ (\alpha^{<\kappa} < \Theta)$. Sei $|W| \geq \Theta$ und $\forall x \in W\ (|x| < \kappa)$. Dann ex. $W' \subseteq W$ ~~und~~ mit $|W'| \geq \Theta$ und Δ, so dass $x \cap y = \Delta$ für alle $x \neq y \in W'$ gilt.

Beweis: siehe Kunen.

Sei nun $\kappa = \omega_2$. Dann ist $\mathbb{P}$ ω_1-abgeschlossen, V und $V[G]$ haben die selben abzählbaren Folgen in V, $\omega_1^{V[G]} = \omega_1$ und $\omega_2^{V[G]} = \omega_2$.

Lemma Ist $\mathbb{P}$ ein ω_1-abgeschlossener Forcing und T ein ω_1-Baum im Grundmodell, dann hat T keine neuen Zweige in $V[G]$.

~~Daraus folgt sofort:~~

~~Satz Gibt es eine unerreichbare Kardinalzahl, so ex. eine generische Erweiterung, in der es keine Kurepa-Bäume gibt.~~

<u>Beweis:</u> Ang. T hat einen Zweig $b \in V[G]$ mit $b \notin V$.

Da $V[G]$ keine neuen abzählbaren Teilmengen von T hat, ist b ein kofinaler Zweig und $b \cap T_{<\gamma} \in V$ für alle $\gamma \in \omega_1$. Für b sei $b(\gamma) = b \cap T_\gamma$. Sei $\dot{b}^G = b$ und $\mathcal{B} = \{$ ~~die Menge~~ $b \in V \mid b$ Zweig in $T\}$, $\dot{\mathcal{B}}^G = \mathcal{B}$.

Dann gibt es ein $p_0 \in G$ mit $p_0 \Vdash (\dot{b}$ Zweig in $T \wedge \dot{b} \notin \check{\mathcal{B}})$. Sei $p \leq p_0$ und $\gamma < \omega_1$. Dann ex. $\gamma < \gamma' < \omega_1$, $p_0, p_1 \leq p$ und $x \neq y \in T_{\gamma'}$ mit $p_0 \Vdash \dot{b}(\check{\gamma}') = \check{x}$ und $p_1 \Vdash \dot{b}(\check{\gamma}') = \check{y}$. Denn gäbe es für alle $\gamma < \gamma' < \omega_1$ nur ein $x \in T_{\gamma'}$ mit $p \Vdash \dot{b}(\check{\gamma}') = \check{x}$, so wäre

$$b = \{y \mid \cancel{y} \exists \gamma' \in \omega_1 \; , \; y \leq_T x \wedge p \Vdash \dot{b}(\check{\gamma}') = \check{x}\} \in V.$$

Wir ~~konstruieren~~ können also rekursiv für alle $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ Bedingungen $p_s \leq p_0$ und $x_s \in T$ ~~mit~~ konstruieren mit

(1) $p_{s^\frown 0}, p_{s^\frown 1} \leq p_s$

(2) $x_s < x_{s^\frown 0}, x_{s^\frown 1}$

(3) $ht(x_{s^\frown 0}) = ht(x_{s^\frown 1})$, $x_{s^\frown 0} \neq x_{s^\frown 1}$

(4) $p_{s^\frown 0} \Vdash \check{x}_{s^\frown 0} \in \dot{b}$, $p_{s^\frown 1} \Vdash \check{x}_{s^\frown 1} \in \dot{b}$.

Sei $\alpha < \omega_1$ so, dass $x_s \in T_{<\alpha}$ für alle s gilt.

Für jedes $f: \omega \to \{0,1\}$ sei p_f eine Bedingung die stärker als alle $p_{f\restriction n}$, $n \in \omega$, ist. Eine solche ex. wegen ω_1-Abgeschlossenheit. Da $p \Vdash (\dot{b}$ kofinal in $T)$, existiert $q \leq p_f$ und $x_f \in T_\alpha$ mit $q \Vdash \check{x} \in \dot{b}$. Aber $x_f \neq x_g$ für verschiedene f, g. Somit hat die α-te Stufe von T mindestens 2^ω viele Elemente. Widerspruch!

$\boxtimes$

Aus dem Lemma folgt unmittelbar, dass kein ω_1-Baum $T \in V$ in $V[G]$ ein Kurepa-Baum ist: Da jeder Zweig von T aus $V[G]$ schon in V ist, hat T höchstens $(2^{\omega_1})^V$ viele Zweige. Aber $(2^{\omega_1})^V < \lambda = \omega_2^{V[G]}$. Also hat T in $V[G]$ weniger als ω_2 viele Zweige.

Ein ähnliches Argument funktioniert für alle Bäume in $V[G]$: Für $\alpha < \lambda$ sei $\mathbb{P}_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq \alpha \times \omega_1\}$ und $\mathbb{P}^\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq (\kappa - \alpha) \times \omega_1\}$. Dann gilt $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\alpha \times \mathbb{P}^\alpha$.

Sei $X \in V[G]$ eine Teilmenge von ω_1. Sei $\dot{X}^G = X$.

Sei $W_\xi \subseteq \{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \check{\xi} \in \dot{X}\}$ eine Antikette, so dass für alle p mit $p \Vdash \check{\xi} \in \dot{X}$ ein $q \in W_\xi$ ex. mit p und q verträglich. Dann ist $|W_\xi| < \lambda$, da $\mathbb{P}$ die λ-AB erfüllt. Sei $\alpha < \lambda$, so dass $W_\xi \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ für alle $\xi \in \omega_1$. Es gilt

$$\xi \in X \iff \exists p \in G \; p \Vdash \check{\xi} \in \dot{X}$$

$$\overset{G \text{ Filter}}{\iff} G \cap W_\xi \neq \emptyset$$

$$\forall \xi \overset{W_\xi \subseteq \mathbb{P}_\alpha}{\iff} (G \cap \mathbb{P}_\alpha) \cap W_\xi \neq \emptyset.$$

Also ist $X \in V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$.

Sei nun $T \in V[G]$ ein ω_1-Baum. Dann ex. ein $\alpha < \lambda$, so dass $T \in V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$. Nach dem Produktsatz ist $G \cap \mathbb{P}^\alpha$ $\mathbb{P}^\alpha$-generisch über $V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$ und $V[G] = V[G \cap \mathbb{P}_\alpha][G \cap \mathbb{P}^\alpha]$. Da $V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$ und V dieselben abzählbaren Folgen in V haben, ist $\mathbb{P}^\alpha$ nicht nur in V ω_1-abgeschlossen sondern auch in $V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$. Also können wir das Lemma anwenden.

D.h. jeder Zweig von T aus $V[G]$ ist schon in $V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$. Aber $(2^{\omega_1})^{V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]} < \lambda = \omega_2^{V[G]}$. Also ist T kein Kurepabaum in $V[G]$.

Damit haben wir bewiesen

<u>Satz</u> Gibt es eine unerreichbare Kardinalzahl, so ex. eine generische Erweiterung, in der es keine Kurepa-bäume gibt.

<u>Zur Erinnerung</u>: Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ zwei Forcings. Definiere $\leq$ auf $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ durch

~~Produktsatz~~

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \text{ gdw } p_1 \leq p_2 \text{ und } q_1 \leq q_2.$$

Sei G $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-generisch. Setze $G_1 = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \ (p,q) \in G\}$ und $G_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists p \ (p,q) \in G\}$. Dann ~~sind~~ ist G_1 $\mathbb{P}$-generisch und G_2 $\mathbb{Q}$-generisch, und es gilt $G = G_1 \times G_2$

<u>Produktsatz</u> G ~~ist~~ $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-generisch über M

$\iff$ $G = G_1 \times G_2$ wobei G_1 $\mathbb{P}$-generisch über M und G_2 $\mathbb{Q}$-generisch über $M[G_1]$.

Es gilt: $M[G] = M[G_1][G_2]$.

Im Folgenden wollen wir die Konsistenzstärke von $\neg\Box_{\omega_1}$ untersuchen.

<u>Bem:</u> Sei $\alpha < \kappa^+$. Dann ex. Folge $\langle C_\nu \mid \nu \leq \alpha, \nu \in \mathrm{Lim} \rangle$

mit (a) $C_\nu \subseteq \nu \cap \mathrm{Lim}$ abgeschlossen

(b) $\mathrm{cf}(\nu) > \omega \longrightarrow \sup(C_\nu) = \nu$

(c) $\lambda \in C_\nu \longrightarrow C_\nu \cap \lambda = C_\lambda$

(d) $\mathrm{otp}(C_\nu) \in \kappa$

<u>Beweis</u> durch Induktion über $\alpha \in \mathrm{Lim}$. Nur Limesschritt, d.h. ~~Induktionsanfang + Nachfolgerschritt~~ α Limes von Lim. Sei

$\alpha = \sup_{i < \tau} \alpha_i$, $\tau = \mathrm{cf}(\alpha)$, $\langle \alpha_i \mid i \in \tau \rangle$ normal, $\alpha_i \in \mathrm{Lim}$

für alle $i > 0$, $\mathrm{cf}(\alpha_{i+1}) = \omega$, $\alpha_0 = 0$. Wähle gemäß

Induktionsvoraussetzung $\langle C^i_\nu \mid \nu \leq \alpha_i, \nu \in \mathrm{Lim} \rangle$. Setze

für $\nu \leq \alpha$, $\nu \in \mathrm{Lim}$

$$C_\nu = \begin{cases} C^{i+1}_\nu - (\alpha_i + 1) & \text{für } \alpha_i < \nu < \alpha_{i+1} \\ \{\alpha_j \mid j < i\} & \text{für } \nu = \alpha_i \\ \{\alpha_i \mid i < \tau\} & \text{für } \nu = \alpha \end{cases}$$

$\boxtimes$

Sei $B \subseteq On$. $\square^B$ bezeichne das Prinzip:

Es ex. $\langle C_\nu \mid \nu \in B \rangle$ mit

(a) $C_\nu \subseteq B \cap \nu$ abgeschlossen

(b) $cf(\nu) > \omega$, $\nu \in B \longrightarrow \sup(C_\nu) = \nu$

(c) $\lambda \in C_\nu \longrightarrow C_\nu \cap \lambda = C_\lambda$

(d) $otp(C_\nu) < \nu$.

<u>Lemma</u> Sei $\kappa \geq \omega$ Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:

(1) $\square_\kappa$

(2) Es ex. $C \subseteq \kappa^+$ club und $C \subseteq B$ mit $\square^B$.

<u>Beweis</u> (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\square_\kappa$ gegeben durch $\langle C_\nu \mid \nu \in Lim \cap \kappa^+ \rangle$. Setze $B = (\kappa^+ - (\kappa+1)) \cap Lim$. Und für $\nu \in B$ setze $D_\nu = Lim(C_\nu) - (\kappa+1)$. Dann ist $\langle D_\nu \mid \nu \in B \rangle$ eine $\square^B$-Folge.

(2) $\Rightarrow$ (1): Seien B, C wie in (2) und $\square^B$ gegeben durch $\langle C_\nu \mid \nu \in B \rangle$. Sei o.E. $\min(C) > \kappa$. Sei $\langle \gamma_i \mid i < \kappa^+ \rangle$ die monotone Aufzählung von $C^* = Lim(C)$. Und für $i < \kappa^+$ sei $\langle C_\nu^i \mid \nu \in \gamma_i, \nu \in Lim \rangle$ eine 'partielle $\square_\kappa$-Folge' gemäß der Bemerkung.

Definiere nun zuerst $\langle D_\nu \mid \nu < \kappa^+, \nu \in \mathrm{Lim} \rangle$ wie folgt:

$$D_\nu = \begin{cases} C_\nu^0 & \text{für } \nu < \gamma_0 \\ C_\nu^{i+1} - (\gamma_i + 1) & \text{für } \gamma_i < \nu < \gamma_{i+1} \\ C_\nu \cap C^* \end{cases}$$

Dann gilt: (a) $D_\nu \subseteq \nu \cap \mathrm{Lim}$ abgeschlossen

(b) $cf(\nu) > \omega \longrightarrow \sup(D_\nu) = \nu$

(c) $\lambda \in D_\nu \longrightarrow D_\nu \cap \lambda = D_\lambda$

(d) $\nu > \kappa \longrightarrow otp(D_\nu) < \nu$

Setze noch $D_\nu = \emptyset$ falls $\nu \notin \mathrm{Lim}$. Definiere nun rekursiv eine Folge $\langle B_\nu \mid \nu < \kappa^+ \rangle$ durch:

Für $\nu \leq \kappa$ sei $B_\nu = D_\nu$. Sei nun $\nu > \kappa$ und $\Theta = \Theta_\nu = otp(C_\nu) < \nu$. Sei $f : \Theta \longrightarrow D_\nu$ ordnungserhaltend und bijektiv. Dann setze $B_\nu = f[B_\Theta]$.

Durch Induktion sieht man:

(a) $B_\nu \subseteq \nu$ abgeschlossen

(b) $cf(\nu) > \omega \longrightarrow \sup(B_\nu) = \nu$

(c) $\lambda \in B_\nu \longrightarrow B_\nu \cap \lambda = B_\lambda$

(d) $otp(B_\nu) \leq \kappa$.

Daraus kann man leicht eine $\square_\kappa$-Folge konstruieren. (Übung)

$\boxtimes$

Satz

Sei $B = \{ \nu \mid \nu = \aleph_\nu$ (Ordinalzahlexponentiation), ν singulär in $L \}$.

Dann gilt $\square^B$.

Beweis: Zeige mit Feinstruktur, dass $\square^B$ in L gilt (Vorlesung letztes Semester). Dann gilt aber $\square^B$ auch in V. ▨

Eine Kardinalzahl κ heißt Mahlo, wenn κ unerreichbar ist und die Menge $\{ \lambda \in \kappa \mid \lambda$ unerreichbar$\}$ stationär in κ.

Satz Sei $\tau = \kappa^+$ nicht Mahlo in L. Dann gilt $\square_\kappa$.

Beweis: Wähle eine club-Menge $C \subseteq \tau$ mit $\nu \in C \rightarrow \nu$ singulär in L. O.E. $C \subseteq B$. Dann folgt $\square_\kappa$ nach Lemma. ▨

Sei nun λ Mahlo in V. Sei $\mathbb{P}$ der ~~Lev~~ Levy-Kollaps von λ auf ω_2. Wir werden zeigen, dass $V[G] \models \neg\square$ ist.

<u>Lemma</u> Sei $\lambda > \cancel{\omega}\ \omega$ regulär. Sei $V[G]$ eine generische Erweiterung von V durch ein λ-Forcing, das die λ-AB erfüllt. Dann ex. für jedes $C \subseteq \lambda$ club, $C \in V[G]$, ein $D \subseteq \lambda$ club mit $D \in V$, so dass $D \subseteq C$ ist. Also, ist $S \in V$ stationär in V, so bleibt S stationär in $V[G]$.

<u>Beweis:</u> Sei o.E. $\dot{C}$, so dass $1\!\!1 \Vdash (\dot{C} \subseteq \check{\lambda}$ ist club). Setze $D = \{\alpha \in \lambda \mid 1\!\!1 \Vdash \check{\alpha} \in \dot{C}\}$. Dann ist $D \subseteq C$ und D ist abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass D unbeschränkt ist. Sei also $\alpha_0 < \lambda$. Wir suchen ein $\alpha > \alpha_0$ mit $1\!\!1 \Vdash \check{\alpha} \in \dot{C}$.

Aber für jedes p ex. $q \leq p$ und $\beta > \alpha$ mit $q \Vdash \check{\beta} \in \dot{C}$. Sei nun W eine maximale Antikette. Dann gibt es für jedes $q \in W$ ein $\beta_q > \alpha$ mit $q \Vdash \check{\beta}_q \in \dot{C}$. Da $\mathbb{P}$ die λ-AB erfüllt, ist $|W| < \lambda$ und ~~weil~~ daher

$\alpha_1 = \sup\{\beta_q \mid q \in \omega\} < \lambda$. Es gilt ~~für alle~~

$\mathbb{1} \Vdash (\exists \beta \in \dot{C})\ \alpha_0 < \beta \leq \alpha_1$. So findet man eine

Folge $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$ mit $\mathbb{1} \Vdash (\exists \beta \in \dot{C})\ \alpha_n < \beta \leq \alpha_{n+1}$

für alle n. Setze $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$. Dann gilt

$\mathbb{1} \Vdash \alpha \in \dot{C}$, da $\mathbb{1} \Vdash (\dot{C}$ abgeschlossen$)$. $\boxtimes$

<u>Satz</u> Sei λ Mahlo in V. Sei $\mathbb{P}$ der Levy-Kollaps von λ auf ω_2. Dann gilt $V[G] \vdash \neg \square$.

<u>Beweis:</u> Da $\mathbb{P}$ der Levy-Kollaps ist, ist $\lambda = \omega_2^{V[G]}$ und $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$. Sei $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\alpha \times \mathbb{P}^\alpha$ wie früher. Ang. in $V[G]$ ist $\vec{C} = \langle C_\nu \mid \nu \in \lambda, \nu \in \mathrm{Lim} \rangle$ eine $\square$-Folge. Dann ist $\{\alpha \in \lambda \mid \vec{C} \upharpoonright \alpha \in V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]\} \subseteq \lambda$ club (in $V[G]$).

Abgeschlossenheit: Sei $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in \gamma\}$ und $\vec{C} \upharpoonright \alpha \in V[G \cap \mathbb{P}_{\alpha_i}]$ für alle $i \in \gamma$. Wähle für jedes $c_i = \vec{C} \upharpoonright \alpha_i$ einen $\mathbb{P}_{\alpha_i}$-Namen $\dot{c}_i$ mit $\dot{c}_i^{G \cap \mathbb{P}_{\alpha_i}} = c_i$. Setze $\dot{c} = \bigcup\{\dot{c}_i \mid i \in \gamma\}$. Dann gilt $\dot{c}^{G \cap \mathbb{P}_\alpha} = \vec{C} \upharpoonright \alpha$.

Unbeschränktheit: Sei α_0 gegeben. Konstruiere rekursiv $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ mit $\vec{C}\restriction\alpha_n \in V[G\cap\mathbb{P}_{\alpha_{n+1}}]$. ~~Setze $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n\in\omega\}$ Dann ist $\alpha_0 \leq \alpha$ und wie~~ Das geht wie im Beweis von "¬ ex. Kurepabaum". Setze $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n\in\omega\}$. Dann ist $\alpha_0 < \alpha$ und wie im Beweis der Abgeschlossenheit gilt $\vec{C}\restriction\alpha \in V[G\cap\mathbb{P}_\alpha]$.

Nach Voraussetzung ist $S := \{\alpha<\lambda \mid \alpha \text{ unerreichbar}\} \subseteq \lambda$ stationär in V. Da $\mathbb{P}$ λ-AB ~~abgeschlossen ist~~ erfüllt, ist $S\subseteq\lambda$ nach Lemma auch stationär in $V[G]$. Sei also $\alpha<\lambda$ unerreichbar mit $\vec{C}\restriction\alpha \in V[G\cap\mathbb{P}_\alpha]$. Da α unerreichbar ist $\omega_2^{V[G\cap\mathbb{P}_\alpha]} = \alpha$.

Wir zeigen nun, dass $C_\alpha \in V[G\cap\mathbb{P}_\alpha]$ ist und erhalten daher einen Widerspruch, da C_α konfinal in α und $\mathrm{otp}(C_\alpha) = \omega_1$ ist. Wegen Kohärenz gilt in $V[G]$, dass C_α dasjenige $C\subseteq\alpha$ ist, ~~so dass~~ mit $C_\lambda = C\cap\lambda$ für alle $\lambda\in C$. Denn da $\mathbb{P}$ ω_1-abgeschlossen ist, konnten keine neuen $<\omega_1$-Folgen in V hinzu. Aber α war Kardinalzahl in V. Also ~~$\mathrm{otp}(C_\alpha)$~~ $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1$ {in $V[G]$}.

Hat man also C', das auch die obige

Eigenschaft erfüllt, so ist $D := \mathrm{Lim}(C') \cap \mathrm{Lim}(C')$ unbeschränkt in α. Also $C = \bigcup\{C_\lambda \mid \lambda \in D\} \in C'$.

D.h. C_τ ist definierbar mit Parametern $\alpha, \vec{C}\restriction\alpha$, die in $V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$ liegen. Sei etwa $C_\alpha = t(\alpha, \vec{C}\restriction\alpha) \in V[G \cap \mathbb{P}_\alpha]$

Dann ist $C_\alpha = \{\gamma < \tau \mid \mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}^\alpha} \check{\gamma} \in t(\check{\alpha}, \check{\vec{C}\restriction\alpha})\}$. Denn $\mathbb{P}^\alpha$ ist homogen. D.h. für alle $p, q \in \mathbb{P}^\alpha$ ex. Automorphismus π von $\mathbb{P}^\alpha$ mit $\pi(p), q$ kompatibel. (Übung) $\boxtimes$

Nun zu Kardinalzahlen, die mit Aronszajn-Bäumen zusammenhängen.

Schreibe

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_m$$

für: Jede Partition von $[\kappa]^n$ in m Teile hat eine homogene Menge der Größe λ. In anderen Worten: Jedes $f : [\kappa]^n \longrightarrow m$ ist konstant auf einem $[H]^n$ mit $H \subseteq \kappa$ und $|H| = \lambda$.

Bem: Die Pfeilrelation bleibt richtig, wenn man die linke Zahl größer oder die rechten kleiner macht.

Also: Gilt $\kappa \to (\lambda)^n_m$ und $\kappa' \geq \kappa$, $\lambda' \leq \lambda$, $n' \leq n$, $m' \leq m$, so gilt $\kappa' \to (\lambda')^{n'}_{m'}$.

Eine Kardinalzahl $\kappa > \omega$, die $\kappa \to (\kappa)^2_2$ erfüllt, heißt <u>schwach kompakt</u>.

Das ist äquivalent zu einer Aussage über Π^1_1-Aussagen.

Eine Π^1_1-Aussage hat die Gestalt $\forall X\, \varphi(X)$ mit $\varphi(X)$ erststufig und $\forall X$ Quantor, der über Teilmengen läuft.

Eine Kardinalzahl κ heißt <u>Π^1_1-unbeschreibbar</u>, wenn für alle $A \subseteq V_\kappa$ und Π^1_1-Aussagen φ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \models \varphi$ ein $\alpha < \kappa$ ex. mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$.

Beachte, dass z.B. κ unerreichbar und κ Mahlo Π^1_1-Aussagen über V_κ sind. Das folgende Lemma zeigt, dass für Π^1_1-unbeschreibbares κ die Menge $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ Mahlo}\}$ stationär in κ ist.

<u>Lemma</u> Sei κ Π^1_1-unbeschreibbar, $A \subseteq V_\kappa$, φ Π^1_1-Formel mit $\langle V_\kappa, A \rangle \models \varphi$. Dann ist $E = \{ \alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, A \cap V_\alpha \rangle \models \varphi \}$ stationär in κ.

<u>Beweis:</u> Sei $C \subseteq \kappa$ club. Dann ex. nach Definition ein α mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, C \cap V_\alpha \rangle \models (\varphi \wedge C$ unbeschränkt$)$. Also ist $\alpha \in C$, da C abgeschlossen ist. ☒

Beachte nun, dass ein Π^1_1-unbeschreibbares κ unerreichbar ist (Übung). Nach Lemma ist κ also auch Mahlo und damit die Menge der Mahlos unter κ stationär.

<u>Satz</u> Für alle κ ~~gilt~~ ist κ genau dann schwach kompakt, wenn κ Π^1_1-unbeschreibbar ist.

<u>Beweis:</u> "$\Longrightarrow$": später

"$\Longleftarrow$": Sei $f : [\kappa]^2 \to 2$. Dann definiere für $\alpha < \kappa$ monotone Folge $\langle \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha \rangle$ mit $\gamma^\alpha_\xi < \alpha$:

Sei $\langle \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \eta \rangle$ bereits definiert.

Setze $B^\alpha_\eta = \{ \gamma < \alpha \mid \forall \xi < \eta \ (\gamma^\alpha_\xi < \gamma \wedge f(\{\gamma^\alpha_\xi, \gamma\}) = f(\{\gamma, \alpha\}) = 0 \}$.

Falls $B^\alpha_\eta \neq \emptyset$, setze $\gamma^\alpha_\eta = \min B^\alpha_\eta$.

Sonst setze $\eta = \delta_\alpha$.

Definiere $h(\alpha) := \sup \{ \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha \} \leq \alpha$

$g(\alpha) := \langle \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha \rangle$.

Betrachte nun 2 Fälle:

① Sei zunächst $E = \{ \alpha < \kappa \mid h(\alpha) < \alpha \}$ stationär. Dann ex. nach Fodor ein stationäres $E_0 \subseteq E$ mit $h \upharpoonright E_0$ konstant. Wegen κ unerreichbar ex. dann $E_1 \subseteq E_0$ mit $|E_1| = \kappa$ und $g \upharpoonright E_1$ konstant. Nach Konstruktion gilt dann aber für alle $\{\alpha, \beta\} \in [E_1]^2$, dass $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$ ist.

② Es ex. ein club $C \subseteq \kappa$ mit $\forall \alpha \in C : h(\alpha) = \alpha$.

Sei o.E. $\forall \alpha \in C : \alpha \in \mathrm{Lim}$. Wir zeigen, es ex. ein unb. $B \subseteq \kappa$ mit $\forall a \in [B]^2 : f(a) = 0$. Ang. nicht. Dann ist

$$\langle V_\kappa, f \rangle \models \underbrace{\forall B\, (B \subseteq \kappa \text{ unbeschränkt} \rightarrow \exists a \in [B]^2 : f(a) \neq 0)}_{\equiv:\ \varphi \quad \Pi^1_1 !}.$$

Also ex. ~~...~~ nach Lemma ein $\alpha \in C$ mit $\langle V_\alpha, \underbrace{f \cap V_\alpha}_{= f \upharpoonright [\alpha]^2} \rangle \models \varphi$.

Widerspruch, da $\{ \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha \}$ ein Gegenbeispiel ist. ▨

<u>Satz</u> Ist κ schwach kompakt, so hat jeder κ-Baum einen Zweig der Länge κ. D.h. es ex. kein κ-Aronszajn-Baum.

<u>Beweis:</u> Sei κ schwach kompakt und $\langle T, \leq_T \rangle$ ein κ-Baum.

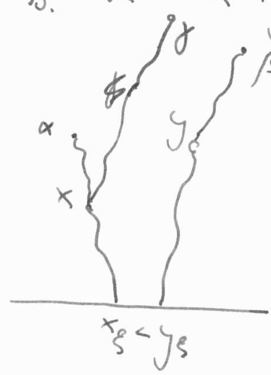
~~Da κ unerreichbar ist~~ Sei o.E. $T = \kappa$. Wir erweitern $<_T$ zu einer linearen Ordnung $\prec$ auf κ: Ist $\alpha <_T \beta$, so sei $\alpha \prec \beta$. Sind α und β unvergleichbar in $<_T$ und ist T_ξ die erste Stufe des Baumes, wo die Vorgänger α_ξ und β_ξ von α und β unterschiedlich sind, so setzen wir $\alpha \prec \beta$ gdw. $\alpha_\xi < \beta_\xi$ ist.

Sei $F : [\kappa]^2 \to \{0, 1\}$ mit

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \text{ gdw. } < \restriction \{\alpha, \beta\} = <_M \restriction \{\alpha, \beta\}.$$

Nach schwacher Kompaktheit, sei H ~~mit~~ homogen für F mit $|H| = \kappa$. Sei B die Menge aller $x \in \kappa$, so dass $\{\alpha \in H \mid x <_T \alpha\}$ die Größe κ hat. Da jede Stufe des Baumes $< \kappa$ ist, muß es auf jeder Stufe mindestens ein Element aus B geben. Können wir also zeigen, dass zwei beliebige Elemente aus B bzgl. $<_T$ vergleichbar sind, so haben wir gezeigt, dass B ein kofinaler Zweig ist.

Seien also x, y unvergleichbare Elemente von B. Sei $x < y$.



Da sowohl x als auch y κ-viele Nachfolger in H haben, gibt es $\alpha < \beta < \gamma$ in H mit $x <_T \alpha$, $y <_T \beta$ und $x <_T \gamma$.

Nach Definition von $<$ gilt $\alpha < \beta$ und $\gamma \nless \beta$.

Also $F(\{\alpha, \beta\}) = 1$ und $F(\{\beta, \gamma\}) = 0$. Widerspruch zur Homogenität von H.

☒

Sei $\kappa > \omega$ regulär. Ex. dann kein κ-Aronszajnbaum, so sagt man auch, κ habe die Baum-Eigenschaft.

<u>Satz</u>

Sei κ unerreichbar und habe es die Baum-Eigenschaft. Dann ist κ schwach kompakt. Es gilt sogar

$\kappa \to (\kappa)^2_\gamma$ für alle $\gamma < \kappa$.

<u>Beweis:</u> Sei $F : [\kappa]^2 \to \gamma$ und $\gamma < \kappa$. Wir werden einen κ-Baum $(T, \subseteq)$ konstruieren, so dass der konfinale Zweig eine homogene Menge liefert. Die Elemente von T sind Funktionen $t : \eta \to \gamma$ mit $\eta < \kappa$. Wir konstruieren $T = \{t_\beta \mid \beta < \kappa\}$ durch doppelte Rekursion: Sei $t_0 = \emptyset$. Sei $\{t_\beta \mid \beta < \alpha\}$ bereits definiert. Definiere t_α rekursiv:

Ist $t_\alpha \upharpoonright \xi = t_\beta$, so setze $t_\alpha(\xi) = F(\{\beta, \alpha\})$.

Ist $t_\alpha \upharpoonright \xi \neq t_\beta$ für alle $\beta < \alpha$, so setze $t_\alpha = t_\alpha \upharpoonright \xi$.

Offensichtlich ist die Funktion $\langle t_\beta \mid \beta < \kappa \rangle$ injektiv. Also ist T ein Baum der Größe κ. Aber $T_\eta \subseteq \{t \mid t : \eta \to \gamma\}$. Da κ unerreichbar ist, ist aber $\gamma^\eta < \kappa$, d.h. $|T_\eta| < \kappa$.

Also hat T die Höhe κ. Außerdem folgt aus der Konstruktion für $t_\beta \in t_\alpha$, dass $\beta < \alpha$ und $F(\{\beta, \alpha\}) = t_\alpha(\operatorname{dom}(t_\beta))$ ist. Sei nun B ein Zweig in T der Länge κ. Und setze für jedes $i \in \gamma$ $H_i = \{\alpha \mid t_\alpha \in B$ und $t_\alpha{}^\frown i \in B\}$. Dann ist jedes H_i homogen für F, ~~aber~~ und mindestens eines hat Mächtigkeit κ. $\boxtimes$

(*)

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. $\mathcal{F}$ heißt κ-vollständig, wenn $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mit $|\mathcal{G}| < \kappa$ gilt.

$\mathcal{F}$ heißt nicht-trivial, wenn $X - \{a\} \in \mathcal{F}$ für alle $a \in X$ gilt.

Bsp: Ist $\kappa > \omega$ regulär, so ist der club-Filter $\{A \subseteq \kappa \mid C \subseteq A$ für ein $C \subseteq \kappa$ club$\}$ ein nicht-trivialer, κ-vollständiger Filter auf κ.

~~$\mathcal{F}$ heißt Ultrafilter, wenn für jedes A~~

(*) Bemerkung: Falls κ schwach kompakt ist, so gilt sogar $\kappa \to (\kappa)^n_\gamma$ für alle $n \in \omega$, $\gamma \in \kappa$.

<u>Satz</u> Es sind äquivalent:

(1) κ ist schwach kompakt

(2) κ ist unerreichbar und es gilt: Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ und $|\mathcal{G}| \leq \kappa$, so ex. ein nicht-trivialer κ-vollst. Filter auf κ, so dass für alle $A \in \mathcal{G}$ $A \in \mathcal{F}$ oder $\kappa - A \in \mathcal{F}$ ist.

(3) κ ist unerreichbar und ist ~~...~~ $\kappa \in M \models ZFC^-$ transitiv mit $|M| = \kappa$, so ex. eine elementare Einbettung $j : M \to N$ mit N transitiv, $j \restriction \kappa = id \restriction \kappa$ und $j(\kappa) > \kappa$.

(4) Für alle $A \subseteq V_\kappa$ ex. transitives M und $B \subseteq M$ mit $\langle V_\kappa, A \rangle \prec \langle M, B \rangle$ und $M \neq V_\kappa$.

<u>Beweis:</u> (1) $\to$ (2): Sei $\mathcal{G}$ wie in (2) gegeben. Sei $\mathcal{G} \cup \{\kappa\} = \{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Für $\alpha < \kappa$ setze $B^0_\alpha = A_\alpha$ und $B^1_\alpha = \kappa - A_\alpha$. Setze $T = \{p : \gamma \to 2 \mid \gamma < \kappa, |\bigcap_{\alpha < \gamma} B_\alpha^{p(\alpha)}| = \kappa\}$

Dann ist $\langle T, \subseteq \rangle$ ein Baum und $p \in T_{dom(p)}$; denn ist $p \in T$ und $\beta \leq dom(p)$, so ist $p \restriction \beta \in T$.

T ist ein κ-Baum. Denn einerseits ist $|T_\gamma| \leq 2^{|\gamma|} < \kappa$, da κ unerreichbar ist. Und andererseits ist die Höhe von T gleich κ. Sei hierzu $\gamma < \kappa$. Definiere für $\delta < \kappa$ $p_\delta : \gamma \to 2$ durch die Forderung $\delta \in B_\alpha^{p_\delta(\alpha)}$.

Wegen κ unerreichbar ex. aber ein $p \in T$ mit $|\{\delta < \kappa \mid p_\delta = p\}| = \kappa$. Für dieses p gilt $p \in T_\gamma$.

Da ~~...~~ κ schwach kompakt ist, hat T einen Zweig b der Länge κ. Setze

$$\mathcal{F} = \{D \subseteq \kappa \mid \exists p \in b \ \exists \delta < \kappa : D \supseteq \bigcap \{B_\alpha^{p(\alpha)} \mid \alpha \in \mathrm{dom}(p)\} - \delta\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ wie gewünscht.

(2) $\to$ (3) Sei $\kappa \in M \models ZFC^-$ ~~...~~ transitiv mit $|M| = \kappa$. Setze $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\kappa) \cap M$. Dann ist $|\mathcal{A}| < \kappa$. Wähle nach (2) einen nicht-trivialen κ-vollständigen Filter $\mathcal{F}$ auf κ mit

(*) $\forall A \in \mathcal{A}$ ($A \in \mathcal{F}$ oder $\kappa - A \in \mathcal{F}$). Dann gilt entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $\kappa - A \in \mathcal{F}$, da sonst $\emptyset = A \cap (\kappa - A) \in \mathcal{F}$.

Bilde nun die "interne Ultraprodukt" von M mit $\mathcal{F}$,

d.h. setze $B = \{ f \in M \mid f : \kappa \to M \}$. Für $f, g \in B$ definiere

$$f \sim g :\iff \{ \alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha) \} \in \mathcal{F}.$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Setze $[f] = \{ g \mid g \sim f \}$,

$\bar{N} = \{ [f] \mid f \in B \}$. Definiere eine Relation E auf $\bar{N}$ durch

$$[f] \mathrel{E} [g] :\iff \{ \alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha) \} \in \mathcal{F}.$$

Es gilt der Satz von Łoś:

(1) Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ZF-Formel. Dann gilt für $f_1, \dots, f_n \in B$

$$\langle \bar{N}, E \rangle \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \text{ gdw } \{ \alpha < \kappa \mid M \models \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \} \in \mathcal{F}.$$

Beachte dabei, dass wegen Aussonderung $\{ \alpha < \kappa \mid M \models \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \} \in M$ ist. Zeige (1) durch Induktion über den Formelaufbau: Für atomare φ gilt die Behauptung nach Definition. Der Negationsschritt gilt wegen (*) und der Konjunktionsschritt wegen der Durchschnittseigenschaft von Filtern. Sei also $\varphi = \exists v\, \psi(x_1, \dots, x_n, v)$.

"$\to$": Sei $\langle \bar{N}, E \rangle \models \exists v\, \psi([f_1], \dots, [f_n], v)$. Dann ex.

$g \in B$ mit $\langle \bar{N}, E \rangle \models \varphi([f_1], \dots, [f_n], [g])$. ~~Aber~~ Also ist nach Induktionsvoraussetzung

$X := \{ \alpha < \kappa \mid M \models \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha), g(\alpha)) \} \in F$.

Und damit ist auch $X \subseteq \{ \alpha < \kappa \mid M \models \exists v\, \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha), v) \} \in F$.

"$\Leftarrow$": Sei $A = \{ \alpha < \kappa \mid M \models \exists v\, \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha), v) \} \in F$. Wegen $M \models ZFC^-$ ex. dass $g \in M$, $g : \kappa \to M$ mit $\forall \alpha \in A\, (M \models \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha), g(\alpha)))$. Dann gilt aber nach Ind.vor. $\langle \bar{N}, E \rangle \models \varphi([f_1], \dots, [f_n], [g])$.

Außerdem gilt:

(2) E ist fundiert.

Ang. nicht. Dann ex. eine Folge $\langle f_n \mid n \in \omega \rangle$ ~~aus~~ mit $f_n \in B$, so dass $[f_{n+1}]\, E\, [f_n]$ für alle $n \in \omega$ gilt. D.h. $X_n = \{ \alpha < \kappa \mid f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha) \} \in F$. Da F ω_1-vollständig ist, gilt $\bigcap \{ X_n \mid n \in \omega \} \neq \emptyset$. Sei also $\alpha \in \bigcap \{ X_n \mid n \in \omega \}$. Dann wäre $f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)$ für alle $n \in \omega$. Widerspruch zur Fundiertheit.

Nach (1) ist E auch extensional. D.h. man kann rekursiv die Transitivierung $\pi : \bar{N} \to N$, $\pi([f]) = \{ \pi([g]) \mid [g]\, E\, [f] \}$ definieren. Für $x \in M$ definiere die konstanten Funktionen $c_x : \kappa \to M$, $\gamma \mapsto x$. Dann ist $c_x \in M$. Also kann man ~~die~~ $j : M \to N$, $j(x) = \pi([c_x])$ definieren.

Nach (1) ist $j : M \to N$ elementar.

Bleibt $j \upharpoonright \kappa = id \upharpoonright \kappa$ und $j(\kappa) > \kappa$ zu zeigen.

Zeige dazu:

(3) Für alle $\tau < \kappa$ gilt $[g] E [c_\tau]$ gdw $\exists \gamma < \tau \; [g] = [c_\gamma]$.

'$\Leftarrow$' trivial

'$\Rightarrow$' Ang. $[g] \neq [c_\gamma]$ für alle $\gamma < \tau$. Dann ist $B_\gamma = \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \neq \gamma\} \in F$.

Wegen κ-Vollständigkeit also $B = \bigcap \{B_\gamma \mid \gamma < \tau\} \in F$. Somit ist $g(\alpha) \notin \tau$ für alle $\alpha \in B$, d.h. nicht $[g] E [c_\tau]$.

Aus (3) folgt rekursiv $\pi([c_\tau]) = \{\pi([c_\gamma]) \mid \gamma < \tau\} = \tau$.

Also ist $j \upharpoonright \kappa = id \upharpoonright \kappa$. Andererseits ist $[c_\tau] E [id \upharpoonright \kappa]$ für alle $\tau < \kappa$, da $\{\alpha < \kappa \mid c_\tau(\alpha) \in id(\alpha)\} = \kappa - (\tau+1) \in F$. Außerdem ist $[id \upharpoonright \kappa] E [c_\kappa]$. Also $\pi([c_\kappa]) > \kappa$, d.h. $j(\kappa) > \kappa$.

(3) $\longrightarrow$ (4): Sei $A \subseteq V_\kappa$. Dann ex. ein transitives $\bar{M} \models ZFC^-$ mit $A, V_\kappa \in \bar{M}$ und $|\bar{M}| = \kappa$, denn wegen κ unerreichbar ist $|V_\kappa| = \kappa$.

Wähle $\tilde{M} \prec H_{\kappa^+} \models ZFC^-$ mit $V_\kappa \cup \{V_\kappa, A\} \subseteq \tilde{M}$ und $|\tilde{M}| = \kappa$.

Dann ist die Transitivierung $\bar{M}$ von $\tilde{M}$ wie gewünscht.

Nach (3) sei $j : \bar{M} \to N$ elementar, N transitiv,

$j \upharpoonright \kappa = id \upharpoonright \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$. Also ist auch $j \upharpoonright V_\kappa = id \upharpoonright V_\kappa$.

Setze $\langle M, B \rangle = j(\langle V_\kappa, A \rangle)$. Dann ist $j(\kappa) \subseteq M$, also $M \neq V_\kappa$.

Außerdem ist $\langle V_\kappa, A \rangle \prec \langle M, B \rangle$. Denn ist $\langle V_\kappa, A \rangle \models \varphi(\vec{a})$,

so ist $M \models (\langle V_\kappa, A \rangle \models \varphi(\vec{a}))$. Also $N \models (\langle M, B \rangle \models \varphi(j(\vec{a})))$

und daher $M \models \varphi(j(\vec{a}))$. Aber $j \upharpoonright V_\kappa = id \upharpoonright V_\kappa$.

(4) $\to$ (1): Sei φ Π^1_1-Aussage, $A \subseteq V_\kappa$ mit $\langle V_\kappa, A \rangle \models \varphi$.

Sei $\varphi \equiv (\forall X)\psi$. Sei $\langle V_\kappa, A \rangle \prec \langle M, B \rangle$, $M \neq V_\kappa$, M transitiv.

Also ist $\kappa \in M_n$ und $\langle M, B \rangle \models (\exists \alpha \, \forall X \subseteq V_\alpha \; \langle V_\alpha, B \cap V_\alpha \rangle \models \psi)$.

Wegen Elementarität gilt also $\langle V_\kappa, A \rangle \models (\exists \alpha \, \forall X \subseteq V_\alpha \; \langle V_\alpha, A \cap V_\alpha \rangle \models \varphi)$.

Da aber für alle $X \subseteq V_\alpha$ $X \in V_\kappa$ gilt, gilt wegen Absolutheit

$\exists \alpha \, \forall X \subseteq V_\alpha \; \langle V_\alpha, A \cap V_\alpha \rangle \models \psi$. $\blacksquare$

<u>Bemerkung</u>: Dieser Beweis zeigt auch einen unbewiesenen Teil

eines früheren Satzes, nämlich "κ schwach kompakt

$\Rightarrow \kappa$ Π^1_1-unbeschreibbar."

Ein κ-Baum heißt speziell, wenn er die Vereinigung von weniger als κ-vielen Antiketten ist. Also ist jeder spezielle κ-Baum T ein κ-Aronszajnbaum. Denn angenommen T hätte einen kofinalen Zweig b. Sei $T = \bigcup \{A_i \mid i < \lambda\}$ mit Antiketten A_i und $\lambda < \kappa$. Dann wäre wegen $|b| = \kappa$ $|b \cap A_i| = \kappa$ für ein $i \in \lambda$. Die Elemente von $b \cap A_i$ sind aber paarweise vergleichbar. Widerspruch zu A_i Antikette.

<u>Satz</u> Ist κ regulär und $2^{<\kappa} = \kappa$, dann ex. ein spezieller κ^+-Baum.

<u>Beweis:</u> Übung.

<u>Satz</u> Ex. kein ω_2-Aronszajnbaum, dann ist ω_2 schwach kompakt in L.

<u>Beweis:</u> Ist ω_2 eine Nachfolgerkardinalzahl in L, so kann man wie im Beweis von "ω_2 nicht unerreichbar in L $\to$ ex. Kurepabaum" ein $A \subseteq \omega_1$ finden, so dass $\omega_1^{L[A]} = \omega_1$ und $\omega_2^{L[A]} = \omega_2$ gilt.

Damals haben wir auch gezeigt, dass dann $L[A] \models 2^{\omega} = \omega_1$ gilt. Also ex. ein spezieller ω_2-Baum in L. ~~Also~~ Dieser dann ist aber auch ein spezieller ω_2-Baum in V. Ex. also kein ω_2-Aronszajnbaum, dann ist ω_2 unerreichbar in L.

Sei nun $\lambda = \omega_2$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathfrak{A} \in L$ und $\mathrm{card}^L(\mathfrak{A}) \leq \lambda$. Wir zeigen, dass dann ein nicht-trivialer, in L λ-vollständiger Filter $\mathcal{F} \in L$ auf λ ex., so dass für alle $A \in \mathfrak{A}$ $A \in \mathcal{F}$ oder $\lambda - A \in \mathcal{F}$ ist. Daraus folgt nach dem vorletzten Satz, dass λ schwach kompakt in L ist.

Sei $\alpha < (\lambda^+)^L$, so dass $\alpha \in Lim$, $\mathfrak{A} \in L_\alpha$ und $L_\alpha \models |\mathfrak{A}| = \lambda$. Sei wie im Beweis von (1) → (2) des vorletzten Satzes $\mathfrak{A} \cup \{\lambda\} = \{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ und für $\alpha < \lambda$ $B^0_\alpha = A_\alpha$, $B^1_\alpha = \kappa - A_\alpha$. Setze wieder

$T = \{p : \gamma \to 2 \mid \gamma < \lambda, |\bigcap_{\alpha<\lambda} B_\alpha^{p(\alpha)}| = \lambda\}$. Dann ist

$\mathcal{T} = \langle T, \subseteq \rangle$ ein Baum. Und da kein λ-Aronszajnbaum ex., hat $\mathcal{T}$ einen Zweig b der Länge λ. Dann ist aber

#

$$\mathcal{F} = \{D \subseteq \lambda \mid D \in L, \exists p \in b\ \exists \delta < \kappa :$$

$$D \supseteq \bigcap \{B_\alpha^{p(\alpha)} \mid \alpha \in \mathrm{dom}(p)\} - \delta\}$$

wie gewünscht. ☑

Satz Ist κ schwach kompakt, so gibt es eine generische Erweiterung, in der $\kappa = \omega_2$, $2^\omega = \omega_2$ und keine ω_2-Aronszajnbäume existieren.

Beweisskizze siehe Jech Satz 28.24.

Satz Ist κ schwach kompakt, so ist κ schwach kompakt in L.

Beweis: Wegen κ unerreichbar, ist $(V_\kappa)^L = L_\kappa$. Sei $A \subseteq L_\kappa$ mit $A \in L$. Wir zeigen, dass ein transitives $L_\kappa \neq M \in L$ und $B \subseteq M$, $B \in L$ existiert mit $\langle V_\kappa, A\rangle \prec \langle M, B\rangle$. Es gilt $A \in L_\eta$ mit $\eta = (\kappa^+)^L$. Wähle $\lambda < \eta$ mit $\kappa \cup \{A\} \subseteq L_\lambda$ und $L_\lambda \prec L_\eta$. Dann ist $L_\lambda \models ZFC^-$. Wegen κ schwach kompakt ex. also eine elementare Einbettung $j: L_\lambda \to N$ mit N transitiv, $j \restriction \kappa = id \restriction \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$. Aufgrund der Elementarität gilt $N \models ZFC^- + V = L$. Also ist $N = L_\delta$ für ein $\delta \in Lim$. Setze $\gamma = j(\kappa)$, $B = j(A)$. Dann ist $j(L_\kappa) = L_\gamma$ und $\langle L_\kappa, A\rangle \prec \langle L_\gamma, B\rangle$. Aber $B \in L_\delta \subseteq L$.

$\boxtimes$

Also fertig.

Noch ein weiteres Beispiel:

Schreibe

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}_{\delta}$$

für: Jede Partition $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \delta$ hat eine homogene Menge H der Größe λ. Dabei bedeutet "homogene Menge" nun: Für alle $n \in \omega$ ist f konstant auf $[H]^n$.

Bemerkung: Sei $\lambda \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:

(i) $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}_{2}$

(ii) $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}_{2^\omega}$

Eine Kardinalzahl $\kappa \geq \omega$ heißt Ramsey, falls $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_{2}$ gilt.

Satz Gibt es ein κ mit $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_{2}$, dann ist $\mathcal{P}^L(\omega)$ abzählbar (insbesondere gilt $V \neq L$).

<u>Beweis:</u> Gelte nach Bemerkung $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^{<\omega}_{2^\omega}$. Betrachte die Struktur $\mathfrak{A} = \langle L_\kappa, \in, \mathcal{P}^L(\omega)\rangle$. Für $a \in [L_\kappa]^{<\omega}$ sei $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ wobei $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Definiere eine Funktion $f : [L_\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}(Fml(\dot\in))$ durch

$$f(a) = \{\varphi \in Fml(\dot\in) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})\}.$$

Sei nun $H \subseteq L_\kappa$ mit $|H| = \omega_1$ homogen für f. Und sei $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ die Skolemhülle von H in $\mathfrak{A}$. Dann gibt es für jedes $x \in \mathfrak{B}$ ein $\varphi \in Fml(\dot\in)$ und ein $a \in [H]^{<\omega}$, so dass x durch $\varphi(x, \vec{a})$ eindeutig bestimmt ist. Schreibe dafür $x = t_\varphi(\vec{a})$. ~~Nach Wahl von H gilt aber $t_\varphi(\vec{a}) = t_\varphi(\vec{b})$ für alle $a, b \in [H]^{<\omega}$ der passenden Größe.~~ Sei nun $t_\varphi(\vec{a}) \subseteq \omega$.

Nach Wahl von H gilt dann aber

$$n \in t_\varphi(\vec{a}) \iff n \in t_\varphi(\vec{b})$$

für alle $n \in \omega$ und $a, b \in [H]^{<\omega}$ der passenden Größe.

D.h. $t_\varphi(\vec{a})$ hängt garnicht von a ab. Da $Fml(\dot\in)$ abzählbar ist, muß also $\mathcal{P}^L(\omega) \cap \mathfrak{B}$ abzählbar sein.

Sei $\mathfrak{B} \cong \langle L_\gamma, \in, \bar{P}\rangle$. Dann ist $\gamma \geq \omega_1$, ~~H~~ da $|H| = \omega_1$.

Also ist $\mathcal{P}^L(\omega) \subseteq L_\gamma$. Aber $\mathfrak{A} \models (\forall x \subseteq \omega)(x \in \mathcal{P}^L(\omega))$

und daher $\langle L_\gamma, \in, \bar{P} \rangle \models (\forall x \subseteq \omega)(x \in \bar{P})$.

Somit ist $\mathcal{P}^L(\omega) \subseteq \bar{P}$ und $|\bar{P}| = |\mathfrak{B} \cap \mathcal{P}^L(\omega)| = \omega$.

$\boxtimes$

Will man also Äquikonsistenzresultate mit Ramsey-Kardinalzahlen zeigen, so braucht man ein anderes inneres Modell als L. Das geeignete innere Modell ist das von Jensen eingeführte Kernmodell K.