

4. Iteriertes Forcing

Wir wollen ein Modell konstruieren, in dem keine
Suzinbäume existieren.

Idee: Sei $T = \langle T, \leq_T \rangle$ ein Suzinbaum, so dass jedes
 $t \in T$ Nachfolger auf jeder Stufe hat. Sei $P = \langle T, \geq_T \rangle$.
Sei G P -generisch. Dann bleiben $\aleph_1$ $V[G]$ Kardinalzahlen
erhalten und G ist ein korrekter Zweig in T .
Denn da T ein Suzinbaum ist, erfüllt P die ω_1 -AB.
Und da jedes $t \in T$ Nachfolger auf jeder Stufe hat, ist
für $\alpha < \omega_1$ $D_\alpha = \{t \in T \mid \text{ht}_T(t) \geq \alpha\}$ dicht in P .

Wir können also eben Suzinbaum zerstören. Denn jedes
Suzinbaum kann man zu einem Suzinbaum mit obiger
Nachfolgereigenschaft ausstatten (siehe Seminar letztes Semester).

Problem: Das Forcing fügt keine Teilhaber von ω_1 hinzu,
also auch keine Suzinbäume.

Einen solchen neuen Suchbaum kann man natürlich
 durch Forcing über der generischen Erweiterung ~~erzwingen~~
 Aber geht das auch schon durch ein Forcing über
 dem Grundmodell? Also:

Frage: Sei N_0 generische Erweiterung von M und
 N_1 von N_0 . Ist dann N_1 generische Erweiterung
 von M ?

Antwort: Ja!

Erinnerung: D heißt dicht unter ~~$\mathbb{P}$~~ p , wenn

$$\forall q \leq p \exists r \leq q \quad r \in D.$$

Ist G ~~eine~~ $\mathbb{P}$ -generisch über M , $p \in G$, $\overset{\text{und}}{D \in M}$ dicht
 unter p , so gilt $D \cap G \neq \emptyset$. Denn wenn noch

$\bar{D} = \{q \in \mathbb{P} \mid p, q \text{ unkompatibel oder } q \in D\} \in M$ setzt,
 so ist $\bar{D}$ dicht in $\mathbb{P}$. Also ist $\bar{D} \cap G \neq \emptyset$.

Sei $q \in \bar{D} \cap G$. Dann ist wegen $p \in G$ auch $q \in D$.

Daraus folgt: $p \Vdash \varphi \iff \{q \leq p \mid q \Vdash \varphi\}$ ist dicht
 unter p .

Lemma (Maximalprinzip)

Gilt $p \Vdash \exists x \varphi(x)$, so ex. $a \in M$ mit $p \Vdash \varphi(a)$.

Beweis: Sei $p \Vdash \exists x \varphi(x)$. Dann ist $D = \{q \leq p \mid \exists b \ q \Vdash \varphi(b)\} \in M$

dicht unter p . Arbeit in M . Sei $A \subseteq D$ maximale

Antikette in D . Für $g \in A$ wähle b_g mit $g \Vdash \varphi(b_g)$.

Setze $a = \{ \langle c, r \rangle \mid \text{ex. } g \in A \text{ mit } g \Vdash \varphi(b_g) \text{ und } c \in \text{dom}(b_g) \text{ mit } r \Vdash c \in b_g \}$.

Dann gilt $g \in A \Rightarrow g \Vdash a = b_g$. (Übung!).

Also ist $B = \{q \leq p \mid q \Vdash \varphi(a)\}$ dicht unter p .

Dann sei $s \leq p$. Dann ex. $g \in A$, ~~mit~~ so dass s und g

kompatibel sind. Sei $r \leq g$, i. Dann ist $r \in B$, da

$r \Vdash a = b_g$ und $r \Vdash \varphi(b_g)$. Also ist $r \Vdash \varphi(a)$.

Somit gilt nach Vorbemerkung $p \Vdash \varphi(a)$. $\square$

Verbesserung:

Satz Ex. kein ω_2 -Aronszajnbaum, aber ist

ω_2 schwach kompakt in L . $\aleph_L$

Beweis: Sei $\alpha < (\aleph_1)^L$, so dass $\alpha \in \text{Lim}$, $\aleph_\alpha \in L_\alpha$ und $\aleph_\alpha$ ist o.E. $\aleph_\alpha$ bzgl. Komplementen und Durchschnitt / Vereinigung von weniger als $\aleph_\alpha$ vielen Mengen abgeschlossen.

$L_\alpha \models |\aleph_\alpha| \leq \aleph_1$. Sei wie im Beweis von "(1) $\rightarrow$ (2)" des

vorletzten Satzes $\aleph_\alpha \in \{A_\alpha \mid \alpha < \aleph_1\} \in L$ eine Aufzählung von

$\aleph(\aleph) \cap L_\alpha$ und für $\alpha < \aleph_1$ sei $B_\alpha^0 = A_\alpha$ und $B_\alpha^1 = \aleph - A_\alpha$.

Setze wieder $T = \{p: \gamma \rightarrow 2 \mid p \in L, \gamma < \aleph, \bigcap_{\alpha < \gamma} B_\alpha^{p(\alpha)} = \emptyset\}$.

Dann ist $\bar{T} = \langle T, \subseteq \rangle \in L$ ein $\aleph$ -Baum, der $\aleph$ unerreichtbar

in L ist. Und da kein $\aleph$ -Aronszajnbaum ex., hat $\bar{T}$ (in V) einen Zweig b der Länge $\aleph$. Sei

$$G = \{D \subseteq \aleph \mid \exists p \in b \exists \delta < \aleph: D \supseteq \bigcap \{B_\alpha^{p(\alpha)} \mid \alpha \in \text{dom}(p) - \delta\}\}.$$

Dann ist G ein nicht-trivialer, $\aleph$ -vollständiger Filter

auf $\aleph$, so dass für alle $A \in \aleph(\aleph) \cap L_\alpha$

$A \in G$ oder $\aleph - A \in G$ ist. Also ex. wie in "(2) $\rightarrow$ (3)"

des vorletzten Satzes eine nicht-triviale elementare Einbettung

$j: L_\alpha \rightarrow L_\beta$. Sei nun $e: \lambda \rightarrow \eta$, $e \in L_\alpha$ eine

Auflösung von η . Dann ist $E := j(e) \in L_\beta$ und

$F = \{e(\gamma) \mid \gamma \in E(\gamma)\}$ wie gewünscht (Nachrechnen!)

□

Bemerkung: Sei $c \in M$, $\alpha = \text{rank}(c)$ und $P \Vdash b \in c$.

Dann ex. $a \in M$ mit $a \in V_\alpha \times P$ und $P \Vdash a = b$.

Beweis: Setze $a = \{ \langle d, p \rangle \mid d \in V_\alpha \cap M, p \Vdash d \in b \}$.

Sei G P -generisch über M . Wir zeigen $a^G = b^G$.

$$\{x^G \mid \exists p \in G \langle x, p \rangle \in a\}$$

$a^G \subseteq b^G$: Sei $d^G \in a^G$, [d.h. $\exists p \in G \langle d, p \rangle \in a$] hole wir

Dann gilt $\exists p \in G p \Vdash d \in b$. Also $d^G \in b^G$.

$a^G \supseteq b^G$: Sei $x \in b^G$. Wegen $b^G \in C^G$ ex. $\bar{b}$ mit $\bar{b}^G = b^G$

und $p \in G$ mit $\langle \bar{b}, p \rangle \in C$. Dann ex. aber d mit

$x = d^G$ und $p \in G$ mit $\langle d, p \rangle \in \bar{b}$. Also $\text{rank}(d)$

$\leq \text{rank}(c) = \alpha$. Somit $d \in V_\alpha$. Wähle $p \in G$ mit $p \Vdash d \in b$.

Dann $\langle d, p \rangle \in a$. Also ist $x = d^G \in a^G$. $\square$

$a^G \subseteq b^G$: Sei $d^G \in a^G$. Dann ex. $\bar{d}$ mit $\bar{d}^G = d^G$

und $p \in G$ mit $\langle \bar{d}, p \rangle \in a$. Also gilt $\exists p \in G p \Vdash d \in b$.

Somit $d^G \in b^G$.

Bemerkung: ^{Gelte} $p \Vdash b \in c$ und $p \Vdash c \neq \emptyset$.

Dann ex. $\bar{b}$ mit $p \Vdash \bar{b} \in c$ und $p \Vdash b = \bar{b}$.

Beweis: Wegen $p \Vdash c \neq \emptyset$ ex. nach Maximalprinzip
ein d mit $p \Vdash d \in c$. Setze

$$\begin{aligned} \bar{b} = & \{ \langle a, r \rangle \mid a \in \text{dom}(b), r \leq p \text{ und } r \Vdash a \in b \} \\ & \cup \{ \langle a, r \rangle \mid a \in \text{dom}(d), r \text{ und } p \text{ inkompatibel} \\ & \text{und } r \Vdash a \in d \}. \end{aligned}$$

Es folgt leicht:

$$p \Vdash b = \bar{b}$$

$$p, q \text{ inkompatibel} \rightarrow q \Vdash \bar{b} = d.$$

Also gilt die Behauptung. $\square$

Sei nun $\mathbb{P} \in M$ ein Forcing und $\dot{Q} \in M$ ein Name mit $\mathbb{P} \Vdash (\dot{Q} = \langle \dot{Q}, \leq_{\dot{Q}}, 1_{\dot{Q}} \rangle \text{ ist ein Forcing})$.

Wir können nun ein Forcing $\mathbb{P} * \dot{Q}$ definieren, so dass jede $\mathbb{P} * \dot{Q}$ -generische Erweiterung von M auch eine $\dot{Q}^G$ -generische Erweiterung von $M[G]$ ist, wobei G $\mathbb{P}$ -generisch über M sei.

$$\text{Alternativ: } \mathbb{P} * \dot{Q} = \{ \langle p, q \rangle \mid p \in \mathbb{P}, q \in \text{dom}(\dot{Q}), p \Vdash q \in \dot{Q} \}$$

Sei dann $\alpha = \text{rank}(\dot{Q})$.

Setze $\mathbb{Q}_{\mathbb{P}} = \{ q \in M \mid q \leq V_{\alpha} * \mathbb{P} \text{ und } \mathbb{P} \Vdash q \in \dot{Q} \}$

und $\mathbb{P} * \dot{Q} = \mathbb{P} \times \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}$.

Definiere $\leq$ auf $\mathbb{P} * \dot{Q}$ durch

$$\langle p, q \rangle \leq \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle \iff p \leq \bar{p} \text{ und } p \Vdash q \leq \bar{q}.$$

Sei $1_{\dot{Q}}$ ein Name für $1_{\dot{Q}}$.

Dann ist $\langle \mathbb{P} * \dot{Q}, \leq, \langle 1_{\mathbb{P}}, 1_{\dot{Q}} \rangle \rangle \in M$ ein Forcing.

Nach Bemerkung gilt:

Sei $p \Vdash \bar{q} \in \dot{Q}$. Dann ex. $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{P}}$ mit $p \Vdash q = \bar{q}$.

Satz (Two-Step Forcing)

Sei Gelte $\mathbb{P} \Vdash (\dot{Q}, \dot{\leq}, \dot{1}_Q)$ ist ein Forcing.

(a) Sei G $\mathbb{P}$ -generisch über M und $H \dot{\Vdash} \dot{Q}^G$ -generisch über $M[G]$. Setze $G * H = \{ \langle p, q \rangle \in \mathbb{P} * \dot{Q} \mid p \in G \text{ und } q^G \in H \}$.

Dann ist $G * H$ $\mathbb{P} * \dot{Q}$ -generisch über M und $M[G * H] = M[G][H]$.

(b) Sei J $\mathbb{P} * \dot{Q}$ -generisch über M . Setze

$$G = \{ p \in \mathbb{P} \mid \exists q \langle p, q \rangle \in J \} \text{ und}$$

$$H = \{ q^G \mid \exists p \langle p, q \rangle \in J \}.$$

Dann ist G $\mathbb{P}$ -generisch über M und $H \dot{\Vdash} \dot{Q}^G$ -generisch über $M[G]$ und $J = G * H$.

Beweis:

(a) Zeige zunächst, dass $G * H$ ein Filter ist:

Sei $\langle p, q \rangle \in G * H$ und $\langle p, q \rangle \leq \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle$. Dann gilt nach Definition $p \leq \bar{p}$ und $p \Vdash q \leq \bar{q}$. Also wegen $p \in G$ ist auch $\bar{p} \in G$ und es gilt $q^G \leq \bar{q}^G$. Somit $\bar{q}^G \in H$, da $q^G \in H$. Also $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle \in G * H$.

Seien $\langle p_1, q_1 \rangle, \langle p_2, q_2 \rangle \in G * H$. Dann wähle $r \in G$ mit $r \leq p_0, p_1$. Und in $M[G]$ wähle $s^G \leq q_0^G, q_1^G$ mit $s^G \in H$. Dann ex. $\bar{r} \in G$ mit $\bar{r} \leq r$ und $\bar{r} \Vdash s \leq q_0, q_1$. Nach Berechnung sei o.E. $s \in Q_P$. Dann ist $\langle r, s \rangle \leq \langle p_1, q_1 \rangle, \langle p_2, q_2 \rangle$ und $\langle r, s \rangle \in G * H$.

Nun zur Generalität: Sei $D \in M$ dicht in $P * Q$.

Setze $D_1 = \{q^G \mid \exists p \in G \langle p, q \rangle \in D\} \in M[G]$.

Dann ist D_1 dicht in $\dot{Q}^G$. Beh: Sei $r^G \in \dot{Q}^G$.

Setze $D_0 = \{p \mid \exists q (\langle p, q \rangle \in D \text{ und } \langle p, q \rangle \leq \langle 1, r \rangle) \in M$.

Dann ist D_0 dicht in P . Dann ist $p' \in P$, so ex.

wegen $P \dot{D}$ dicht in $P * Q$ es q mit $\langle p, q \rangle \in D$ und

$\langle p, q \rangle \leq \langle p', r \rangle \leq \langle 1, r \rangle$. Also $p \in D_0$ und $p \leq p'$.

Wähle nun ein $p \in \mathcal{D}_0 \cap G$. Hier ex. g mit
 $\langle p, g \rangle \in \mathcal{D}$ und $\langle p, g \rangle \leq \langle 1, r \rangle$. Also ist $g^G \in \mathcal{D}_1$
 und $p \Vdash g \leq r$, d.h. $g^G \leq r^G$.

Da $\mathcal{D}_1$ dicht in $\mathbb{Q}^G$ ist, ex. ein x mit $x \in \mathcal{D}_1 \cap H$.
 Nach Def. von $\mathcal{D}_1$ gibt es hierzu ein $p \in G$ und $g \in M$
 mit $\langle p, g \rangle \in \mathcal{D}$ und $x = g^G$. Also ist $\langle p, g \rangle \in G * H$,
 d.h. $\mathcal{D}_1(G * H) \neq \emptyset$

Bleibt zu zeigen, dass $M[G * H] = M[G][H]$

" $\subseteq$ ": $M \subseteq M[G][H]$ und $G * H \in M[G][H]$.

Also $M[G * H] \subseteq M[G][H]$, da $M[G * H]$ minimales ZFC-Modell
 mit diesen Eigenschaften.

" $\supseteq$ ": $M \subseteq M[G * H]$ und $G \in M[G * H]$

$$\Rightarrow M[G] \subseteq M[G * H]$$

$$M[G] \subseteq M[G * H] \text{ und } H \in M[G * H]$$

$$\Rightarrow M[G][H] \subseteq M[G * H].$$

(b) Zeige zunächst, G ist ein Filter

Sei $p \in G$ und $p \leq p'$. Dann ex. $q \in \mathbb{Q}_D$ mit $\langle p, q \rangle \in J$. Also $\langle p', q \rangle \in J$, d.h. $p' \in G$.

Seien $p_0, p_1 \in G$. Dann ex. q_0, q_1 mit $\langle p_0, q_0 \rangle, \langle p_1, q_1 \rangle \in J$.
Also ex. $\langle r, t \rangle \in J$ mit $\langle r, t \rangle \leq \langle p_0, q_0 \rangle, \langle p_1, q_1 \rangle$.

Somit $r \in G$ und $r \leq p_0, p_1$.

Zeige: G ist gerichtet

Sei D dicht in $\mathbb{P}$. Dann ist $\bar{D} = D \times \mathbb{Q}_D$

dicht in $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Also ist $\bar{D} \cap J \neq \emptyset$, d.h. $D \cap G \neq \emptyset$.

Zeige nun: H ist Filter

Sei $q^G \in H$, ~~mit $p \in \mathbb{P}$~~ d.h. ex $p \in \mathbb{P}$ mit $\langle p, q \rangle \in J$.

Sei $q^G \leq \bar{q}^G$. Dann ex. $p' \in G$ mit $p' \leq p$ und

$p' \Vdash q \leq \bar{q}$. ~~o.E.~~ Nach Bemerkung o.E. $\bar{q} \in \mathbb{Q}_D$

Somit $\langle p', q \rangle \leq \langle p, \bar{q} \rangle$, also $\langle p, \bar{q} \rangle \in J$. Daher $\bar{q}^G \in H$.

Seien $p_0^G, p_1^G \in H$ mit $\langle p_0, p_0 \rangle, \langle p_1, p_1 \rangle \in J$.

Wähle $\langle r, t \rangle \in J$ mit $\langle r, t \rangle \leq \langle p_0, p_0 \rangle, \langle p_1, p_1 \rangle$.

Also $t^G \in H$ und $r \in G$. Außerdem $r \Vdash t \leq p_0, p_1$.

Somit $t^G \leq p_0^G, p_1^G$.

Zeige nun: H ist generic

Sei E^G dicht in $\mathbb{Q}^G$. Wähle $p_0 \in G$ mit $p_0 \Vdash E$ dicht in $\mathbb{Q}$.

Setze $D = \{ \langle p, q \rangle \leq \langle p_0, \mathbb{1} \rangle \mid p \Vdash q \in E \}$. Dann ist

D dicht unterhalb von $\langle p_0, \mathbb{1} \rangle$, denn sei $\langle p, q \rangle \leq \langle p_0, \mathbb{1} \rangle$.

Also $p \Vdash E$ dicht in $\mathbb{Q}$. Somit gibt es nach Maximum-

prinzip ein r mit $p \Vdash (r \in E \text{ und } r \leq q)$. Wieder o.E. $r \in \mathbb{Q}_D$.

Also $\langle p, r \rangle \leq \langle p, q \rangle$ und $\langle p, r \rangle \in D$.

Nun ist aber $\langle p_0, \mathbb{1} \rangle \in J$. Also ist $D \cap J \neq \emptyset$.

Sei $\langle p, q \rangle \in D \cap J$. Dann ist $\dot{q}^G \in E^G \cap H$.

$A = \{p \in P \mid \exists \beta \ p \Vdash \sup \{\alpha \mid p_\alpha^\vee \in \check{G}\} = \beta\}$. Wähle

eine maximale Antikette $\{g_\gamma \mid \gamma \in \delta\} \subseteq A$. Dann ist

$\delta < \kappa$, da P die κ -AB erfüllt. Für $\gamma < \delta$ sei β_γ

so, dass $p_\gamma \Vdash \sup \{\alpha \mid p_\alpha^\vee \in \check{G}\} = \beta_\gamma$. Sei $\beta = \sup \{\beta_\gamma \mid \gamma < \delta\}$.

Da κ regulär ist, ist $\beta < \kappa$ und $P \Vdash \sup \{\alpha \mid p_\alpha^\vee \in \check{G}\} \leq \beta$.

Dies ist aber ein Widerspruch, da $p_{\beta+1} \Vdash p_{\beta+1}^\vee \in \check{G}$.

Wähle hier ein p mit $p \Vdash \sup \{\alpha \mid p_\alpha^\vee \in \check{G}\} = \kappa$.

Sei G P -generisch über M mit $p \in G$. Arbeite jetzt in $M[G]$. Setze $B = \{\alpha \mid p_\alpha \in G\}$. Dann ist nach Wahl

von p $\sup B = \kappa$. Also $|B| = \kappa$, da κ immer noch

regulär ist. Aber nach Voraussetzung erfüllt $\mathbb{Q}^G$ die

κ -AB. Also ex. $\alpha, \beta \in B$ mit $\alpha \neq \beta$, so dass g_α^G und

g_β^G kompatibel sind. Sei $s^G \leq g_\alpha^G, g_\beta^G$ und o.E. $s \in \mathbb{Q}_P$.

Wähle $r \in G$ mit $r \Vdash s \leq g_\alpha, g_\beta$. Wähle $r' \in G$ mit

$r' \leq r, p_\alpha, p_\beta$. Dann ist $\langle r', s \rangle \leq \langle p_\alpha, g_\alpha \rangle, \langle p_\beta, g_\beta \rangle$.



Wir definieren nun iteriertes Forcing.

Sei $\alpha \in \text{On} \cap M$.

$\langle \langle P_\beta, \leq_\beta, \mathbb{1}_\beta \rangle \mid \beta \leq \alpha \rangle \in M$ ist Iteration der Länge α
gegeben durch $\langle \dot{Q}_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M$, wenn gilt:

(a) Für $\beta \leq \alpha$ ist $\langle P_\beta, \leq_\beta, \mathbb{1}_\beta \rangle$ ein Forcing
und für $\beta < \alpha$ gilt $P_\beta \Vdash (\dot{Q}_\beta \text{ ist Forcing})$.

(b) Für $\beta \leq \alpha$ ist P_β die Menge aller $p \in M$ mit

(i) p ist Funktion, $\text{dom}(p) = \beta$, $\forall \gamma < \beta$ $p(\gamma) \in (\dot{Q}_\gamma)_{P_\gamma}$

(ii) ~~es ex.~~ der Träger $\{\gamma < \beta \mid p(\gamma) \neq \mathbb{1}_{\dot{Q}_\gamma}\}$ von p
ist endlich

(iii) für $p, q \in P_\beta$ gilt $p \leq_\beta q$ gdw. $\forall \gamma < \beta$ $p \restriction \gamma \Vdash p(\gamma) \leq q(\gamma)$

(iv) $\mathbb{1}_\beta = \langle \mathbb{1}_{\dot{Q}_\gamma} \mid \gamma < \beta \rangle$.

genauer: Iteration mit endlichem Träger.

Bemerkung: $\mathcal{P}_{\beta+1} \cong \mathcal{P}_\beta * \mathcal{Q}_\beta$

Wir identifizieren $\mathcal{P}_{\beta+1}$ und $\mathcal{P}_\beta * \mathcal{Q}_\beta$.

Bemerkung: Für $\lambda \in \text{Lim}$ gilt $\mathcal{P}_\lambda \cong \bigcup \{ \mathcal{P}_\beta \mid \beta < \lambda \}$.

Eine alternative Definition von Iteration mit endlichem Träger

~~von~~ spricht daher von einem konkativen System

$\langle i_\beta \mid \gamma < \beta \leq \alpha \rangle$ mit $i_\beta: \mathcal{P}_\gamma \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ wobei

für $\lambda \in \text{Lim}$ i_λ der direkte Limit von $\langle i_\beta \mid \beta < \lambda \rangle$

ist.

Lemma Sei $\langle \mathcal{P}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle$ Iteration. Sei G $\mathcal{P}_\alpha$ -generisch

über M . Für $\beta \leq \alpha$ setze $G_\beta = \{ p \restriction \beta \mid p \in G \}$.

Dann ist G_β $\mathcal{P}_\beta$ -generisch über M .

Beweis: Offensichtlich ist G_β ein Filter. Sei also $D \in M$

dicht in $\mathcal{P}_\beta$. Setze $\bar{D} = \{ p \in \mathcal{P}_\alpha \mid p \restriction \beta \in D \}$. Dann

ist $\bar{D}$ dicht in $\mathcal{P}_\alpha$. Denn sei $p \in \mathcal{P}_\alpha$. Wähle $r \in D$

mit $r \leq p \restriction \beta$. Dann ist $s := r \cup p \restriction (\alpha \setminus \beta) \in \mathcal{P}_\alpha$ und

mit $s \leq p$. Sei also $p \in G \cap \bar{D}$. Dann ist $p \restriction \beta \in G_\beta \cap D$

□

Konstruktion: Ist G $\mathcal{P}_\alpha$ -generisch über M , so sei mit

G_β stets die Menge von oben generiert.

Schreibe auch $\dot{H}_\beta$ für $\dot{H}_{\mathcal{P}_\beta}$.

Seien G, G_β wie in Lemma. Dann gilt

$$M = M[G_0] \subseteq M[G_1] \subseteq \dots \subseteq M[G_\beta] \subseteq \dots \subseteq M[G].$$

Und da $\mathcal{P}_{\beta+1} = \mathcal{P}_\beta * \dot{Q}_\beta$, ex. ein $H_\beta \subseteq \dot{Q}_\beta^{G_\beta}$ mit

$$G_{\beta+1} = G_\beta * H_\beta \quad \text{und} \quad M[G_{\beta+1}] = M[G_\beta][H_\beta].$$

Wir können G_β rekursiv aus $\langle H_\gamma \mid \gamma < \beta \rangle$ zurückgewinnen:

$$G_0 = \{\emptyset\}$$

$$G_{\beta+1} = \{ \langle p, q \rangle \in \mathcal{P} * \dot{Q}_\gamma \mid p \in G_\beta \text{ und } q^{G_\beta} \in H_\gamma \}$$

$$G_\lambda = \{ p \in \mathcal{P}_\lambda \mid \forall \gamma < \lambda \quad p \restriction \gamma \in G_\gamma \} \text{ für } \lambda \in \text{Lim.}$$

Aber im Gegensatz zum Two-step forcing liefert sukzessives

Erweitern keine generische Menge für die Iteration: Seien

$$\langle G_i \mid i \in \omega \rangle \text{ } \mathcal{P}_i\text{-generisch und } G = \{ p \in \mathcal{P}_\omega \mid \forall n \quad p \restriction n \in G_n \}.$$

Dann können folgende Möglichkeiten eintreten,

$$(1) \quad G \text{ ist } \mathcal{P}_\omega\text{-generisch}$$

(2) G ist nicht P_u -generisch, aber $M[G]$ ist generische Erweiterung von M .

(3) $M[G]$ ist kein Modell von ZF .

Bemerkung: Wegen des Maximumprinzips braucht man Namen nicht explizit zu konstruieren. Es reicht $\check{\alpha}$ und $\check{G}$.
z.B. ex. b mit $1 \Vdash b = \bigcup \check{G}$, denn $1 \Vdash \exists x (x = \bigcup \check{G})$.
Statt Namen kann man also Terme verwenden.

Warum Funktionen mit endlichen Trägern?

Satz Sei $\langle P_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle$ iterativ gegeben durch

$\langle \dot{Q}_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$, so dass $P_\beta \Vdash (\dot{Q}_\beta \text{ erfüllt die } \check{\kappa}\text{-AB})$

für alle $\beta < \alpha$ gilt. Sei $\kappa > \omega$ regulär.

Dann erfüllt P_α die κ -AB in M .

Beweis: Arbeite in M . Zeige durch Induktion: Für alle

$\beta \leq \alpha$ erfüllt P_β die κ -AB in M .

• $P_0 = \{\emptyset\}$ klar

• $P_{\gamma+1} = P_\gamma * \dot{Q}_\gamma$. Also gilt die κ -AB nach Induktionsvoraussetzung und einem früheren Satz.

• Sei $\beta \in \text{Lim}$ und $A \subseteq \mathbb{P}_\beta$ mit $|A| = \kappa$.

Für $p \in A$ ist Δ_p endlich. Somit ex. nach Δ -System-Lemma ein $\bar{A} \subseteq A$ mit $|\bar{A}| = \kappa$ und ein $\Delta \leq \beta$, so

dass für $p, q \in \bar{A}$, $p \neq q$ stets $\Delta_p \cap \Delta_q = \Delta$ gilt.

Wähle $\gamma < \beta$ mit $\Delta \leq \gamma$ und betrachte $B = \{p \restriction \gamma \mid p \in \bar{A}\}$.

Nach Induktionsvoraussetzung ex. $p, q \in \bar{A}$, so dass $p \neq q$

und $p \restriction \gamma, q \restriction \gamma$ in $\mathbb{P}_\gamma$ kompatibel sind. Sei $r \in \mathbb{P}_\gamma$

und $r \leq p \restriction \gamma, q \restriction \gamma$. Definiere $s \in \mathbb{P}_\beta$ durch

$$s(\delta) = \begin{cases} r(\delta) & \text{für } \delta < \gamma \\ p(\delta) & \text{für } \gamma \leq \delta < \beta \text{ und } \delta \in \Delta_p \\ q(\delta) & \text{für } \gamma \leq \delta < \beta \text{ und } \delta \notin \Delta_p. \end{cases}$$

Dann ist $s \leq p, q$. □

Bemerkung: ~~Nur~~ $p \in \mathbb{P}_\beta$ Sei $\langle \mathbb{P}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle$ eine Iteration.

Ist dann $p \in \mathbb{P}_\beta$, so ~~erhält man~~ ist $\bar{p}$ mit

$$\bar{p}(f) = \begin{cases} p(f) & \text{für } f < \beta \\ \perp_{Q_f} & \text{für } \beta \leq f < \alpha \end{cases}$$

eine Bedingung aus $\mathbb{P}_\alpha$. ~~Es gilt~~ $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_\alpha$

Sei $\bar{\mathbb{P}}_\beta = \{\bar{p} \mid p \in \mathbb{P}_\beta\}$ und $\bar{G}_\beta = \{\bar{p} \mid p \in G_\beta\}$.

Dann gilt $\mathbb{P}_\alpha = \bigcup \{\bar{\mathbb{P}}_\beta \mid \beta < \alpha\}$ und $G_\alpha = \bigcup \{\bar{G}_\beta \mid \beta < \alpha\}$
für $\alpha \in \text{Lim}$.

Lemma Sei in M $\langle \mathbb{P}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle$ eine Iteration der Länge $\alpha \in \text{Lim}$. Sei G $\mathbb{P}_\alpha$ -generisch über M , $s \in M$, $X \subseteq S$, $X \in M[G]$ und $\cancel{|S| < cf(\alpha)}$ $M[G] \models |S| < cf(\alpha)$.
Dann ex. $\beta < \alpha$ mit $X \in M[G_\beta]$.

Beweis: Sei $\dot{a}^G = X$. Dann gilt für $s \in S$:

$$s \in X \iff \exists p \in G \quad p \Vdash_\alpha \dot{s} \in \dot{a}.$$

Ansonsten gilt $\mathbb{P}_\alpha = \bigcup \{ \bar{\mathbb{P}}_\beta \mid \beta < \alpha \}$ und $G = \bigcup \{ \bar{G}_\beta \mid \beta < \alpha \}$. Wähle nun in $M[G]$ für jedes $s \in X$ ein $\beta_s < \alpha$ mit $\exists p \in G_{\beta_s} \quad \bar{p} \Vdash_\alpha \dot{s} \in \dot{a}$.

Dann ist $\gamma := \sup \{ \beta_s \mid s \in X \} < \alpha$, da $M[G] \models |X| \leq |S| < cf(\alpha)$.
Aber $X = \{ s \in S \mid \exists p \in G_\gamma \quad \bar{p} \Vdash_\alpha \dot{s} \in \dot{a} \}$. Und da $\Vdash_\alpha$ definierbar in M ist, gilt $X \in M[G_\gamma]$. $\square$

Sei $MA_{\aleph}$ die folgende Aussage:

Ist $\mathbb{P}$ ein Forcing, das die $\aleph$ -AB erfüllt,
und $\mathcal{D}$ eine Familie von $\leq \aleph$ -vielen dichten Mengen in $\mathbb{P}$, dann ex. ein Filter G in $\mathbb{P}$ mit $\nexists D \in \mathcal{D} \ (G \cap D \neq \emptyset)$.

(11)

MA sei die Aussage $\forall \kappa < 2^\omega \text{ MA}_\kappa$.

Entsprechend der entsprechenden Motivation für
iteriertes forcing gilt also $\text{MA}_{\omega_1} \Rightarrow \text{ex. kein Suslinbaum}$.

Lemma Für unendliche Kardinalzahlen κ sind
äquivalent:

(1) MA_κ

(2) Ist $\mathbb{P} \leq \kappa$ ein forcing, das die ω_1 -AB erfüllt
und $\mathcal{V}$ eine Familie von $\leq \kappa$ -vielen dichten
Mengen in $\mathbb{P}$, dann ex. ein Filter G in $\mathbb{P}$
mit $\forall D \in \mathcal{V} (G \cap D \neq \emptyset)$.

Beweis: (1) $\rightarrow$ (2) ist klar.

Nehme also (2) und sei $\mathbb{Q}$ ein beliebiges forcing,
das die ω_1 -AB erfüllt. Sei $\mathcal{V}$ eine Familie von $\leq \kappa$ -vielen
dichten Mengen in $\mathbb{Q}$. Wir konstruieren zunächst ein

$\mathbb{P} \leq \mathbb{Q}$ mit

(1) $|\mathbb{P}| \leq \kappa$

(2) $D \cap \mathbb{P}$ ist dicht in $\mathbb{P}$ für alle $D \in \mathcal{V}$

(3) Für $p, q \in \mathcal{P}$ gilt p, q kompatibel in $\mathcal{P}$
 gdw p, q kompatibel in $\mathcal{Q}$.

Betrachte den obere Struktur $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{Q}, \leq, \perp, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots \rangle$
 wobei $\mathcal{D} = \{ \mathcal{D}_i \mid i \leq \kappa \}$. Sei nach dem Satz von
 Löwenheim + Skolem $\langle \mathcal{P}, \leq \cap \mathcal{P}, \perp, \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{P}, \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{P} \rangle \prec \mathcal{Q}$.
 Dann ist $\mathcal{P}$ wie gewünscht.

Aufgrund von (3) erfüllt $\mathcal{P}$ die ω_1 -A.B. Rel. aus
 und $\mathcal{D}' = \{ \pi[\mathcal{D} \cap \mathcal{P}] \mid \mathcal{D} \in \mathcal{D} \}$.

$\pi: \langle \mathcal{P}, \leq \cap \mathcal{P}, \perp \rangle \cong \langle \kappa, \leq', \perp' \rangle$! Dass ex. nach (2) es

Filtri C' in $\langle \kappa, \leq', \perp' \rangle$ mit $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}' \quad C' \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

Setze $C = \pi^{-1}[C']$. Dann gilt $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{D} \quad C \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$.

Definiere weiterhin $H = \{ q \in \mathcal{Q} \mid \exists p \in C (p \leq q) \}$. Dann ist

H ein Filter in $\mathcal{Q}$ mit $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{D} \quad H \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

□

Bemerkung: Sei $S \in M$ und $P \Vdash a \in \check{S}$.

Sei $b = \{ \langle \check{x}, p \rangle \mid p \Vdash \check{x} \in a ; x \in S \}$. Dann gilt
 $P \Vdash a = b$.

Beweis: Sei G P -generisch über M . Wir nennen $a^G = b^G$

zeigen.

" $\subseteq$ ": Sei $x \in a^G$. D.h. $\check{x}^G \in a^G$. Dann ex. $p \in G$ mit
 $p \Vdash \check{x} \in a$. Also ist $\langle \check{x}, p \rangle \in b$ und $x = \check{x}^G \in b^G$.

" $\supseteq$ ": Sei $x \in b^G$. Dann ex. $p \in G$ und $c \in M$ mit
 $\langle c, p \rangle \in b$ und $c^G = x$. Nach Definition von b also
 $c = \check{x}$ und $p \Vdash \check{x} \in a$. Wegen $p \in G$ also $x = \check{x}^G \in a^G$. $\square$

Bemerkung: Sei $\langle P_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle$ eine Iteration.

Für $p \in P_\beta$ sei $\bar{p} \in P_\alpha$ definiert wie zuvor. Sei a ein

P_β -Name. Dann definieren rekursiv $\bar{a} = \{ \langle \bar{b}, \bar{p} \rangle \mid \langle b, p \rangle \in a \}$.

Dann ist $\bar{a}$ ein P_α -Name und $\bar{a}^G = a^G$ für

alle P_α -generischen G .

Satz Sei $M \models 2^{\omega_1} = \omega_2$. Dann ex. es $P \in M$

mit $P \Vdash (MA_{\omega_1} \text{ und } 2^{\omega} = \omega_2)$, das in M die ω_1 -AB erfüllt. D.h. $P \Vdash MA$.

Beweis: Arbeite in M . Wir definieren eine Iteration

der Länge ω_2 , d.h. $\langle P_\beta \mid \beta < \omega_2 \rangle$ gegeben durch

$\langle \dot{Q}_\beta \mid \beta < \omega_2 \rangle$, so dass stets $P_\beta \Vdash (\dot{Q}_\beta$ erfüllt die ω_1 -AB). Also erfüllt nach einem früheren Satz

jedes P_β die ω_1 -AB in M . Also gilt

$$|P(\omega_1) \cap M[GT]|^{M[GT]} \leq \left((|P_\beta|^{\omega_1})^{\omega_1} \right)^M. \text{ Wir werden aber}$$

auch $|P_\beta| \leq \omega_1$ garantieren. Wegen $M \models 2^{\omega_1} = \omega_2$ gilt

also stets $M[GT] \models |P(\omega_1)| \leq \omega_2$. D.h. es gibt nach

Maximierungsprinzip ein $\dot{\#}_P$ mit

$P_\beta \Vdash \dot{\#}_P : \omega_2 \rightarrow V$ ist eine Aufzählung

aller Formeln der Form $\langle \omega_1, \leq, \perp \rangle$.

Wähle eine Bijektion $\pi: \omega_2 \rightarrow \omega_2 \times \omega_2$ mit

$$\gamma \leq \beta \text{ falls } \pi(\beta) = \langle \gamma, \gamma \rangle.$$

Sei nun $\langle \mathbb{P}_\gamma \mid \gamma \leq \beta \rangle$ bereits definiert und $\pi(\beta) = \langle \gamma, \gamma \rangle$.

Dann wähle $\dot{Q}_\beta$ so, dass

$$\mathbb{P}_\beta \Vdash \dot{Q}_\beta \text{ ist } \overset{\text{Forcing}}{\text{von der Form}} \langle \omega_1, \leq, \perp \rangle$$

$$\wedge (\overline{\dot{\#}_\gamma}(\gamma) \text{ erfüllt die } \omega_1\text{-AD}$$

$$\longrightarrow \dot{Q}_\beta = \overline{\dot{\#}_\gamma}(\gamma)).$$

Beachte, dass es solches $\dot{Q}_\beta$ nach Maximumsprinzip existiert.

Nach Berechnung können wir a.E. ableiten, dass

$$\dot{Q}_\beta \in \{\dot{x} \mid x \in \omega_1^2\} \times \mathcal{P}. \text{ Aber } \mathbb{P}_{\beta+1} = \mathbb{P}_\beta * \dot{Q}_\beta =$$

$$\{\langle p, q \rangle \mid p \in \mathbb{P}_\beta, q \in \text{dom}(\dot{Q}_\beta), p \Vdash q \in \dot{Q}_\beta\} \text{ und}$$

$$\mathbb{P}_\lambda = \bigcup \{\mathbb{P}_\beta \mid \beta < \lambda\} \text{ für } \lambda \in \text{Lim}. \text{ Daraus folgt}$$

$$\text{mit Induktion leicht, dass } \cancel{\text{ist}} |\mathbb{P}_\beta| < \omega_1 \text{ für}$$

$$\text{alle } \beta < \omega_2 \text{ gilt.}$$

Zeige nun: $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{\omega_2} \Vdash MA_{\omega_1}$.

Sei dazu G $\mathcal{P}$ -generisch über M . Und seien $\mathcal{Q}, \mathcal{V} \in M[G]$

mit $M[G] \models (\mathcal{Q} \text{ ist ein Filter der Form } \langle \omega_1, \leq, \perp \rangle, \text{ also}$

die ω_1 -AB erfüllt

$$\wedge \mathcal{V} = \langle \mathcal{D}_\gamma \mid \gamma < \omega_1 \rangle$$

$$\wedge \forall \gamma < \omega_1 \quad \mathcal{D}_\gamma \text{ ist dicht in } \mathcal{Q} \rangle \equiv \varphi(\mathcal{Q}, \mathcal{V})$$

Dann gilt es nach einer früheren Lemma ein $\dot{f} < \omega_2$ mit

$$\mathcal{Q}, \mathcal{V} \in M[G_{\dot{f}}]. \text{ Dann ist } M[G_{\dot{f}}] \models \varphi(\mathcal{Q}, \mathcal{V}).$$

Also gibt es nach Definition von $\dot{\#}_\gamma$ ein $f < \omega_2$

$$\text{mit } \dot{\#}_\gamma^{G_f}(f) = \mathcal{Q}.$$

Sei nun $\overline{\tau}(f) = \langle \gamma, f \rangle$.

Dann gilt auch $M[G_f] \models \varphi(\mathcal{Q}, \mathcal{V})$. Also gilt

$$\dot{\#}_\gamma^{G_f}(f) = \overline{\tau}_\gamma^{G_f}(f) = \mathcal{Q} \text{ erfüllt die } \omega_1\text{-AB.}$$

Somit ist $\mathcal{Q}_f^{G_f} = \mathcal{Q}$ nach Definition von $\mathcal{Q}_f$.

Also enthält $M[G_{\beta+1}]$ einen über $M[G_\beta]$ $\mathcal{Q}$ -generischen Filter. Dieser ist also wie gewünscht, da $\mathcal{V} \subseteq M[G_\beta]$.

Bleibt $2^\omega = \omega_2$ in MEGJ zu zeigen:

$2^\omega \leq \omega_2$ in MEGJ wurde bereits oben gezeigt.

Umgekehrt gilt $MA_{\omega_1} \Rightarrow 2^\omega \geq \omega_2$.

Es gelte also MA_{ω_1} und setze $\mathcal{B} = \{f \mid f: \omega \rightarrow 2\}$.

Sei $A \subseteq \mathcal{B}$ mit $|A| \leq \omega_1$. Wir zeigen $A \neq \mathcal{B}$. Sei also

$\mathcal{P} = \{p \mid p: \omega \rightarrow 2, \text{ neu}\}$ mit $\geq$ als Ordnung. Dann

ist $\mathcal{Q}$ abzählbar, erfüllt also die ω_1 -AB. Für $f \in A$ sei

$\mathcal{D}_f = \{p \in \mathcal{P} \mid \exists i: p(i) \neq f(i)\}$. Für neu sei $\mathcal{D}_n = \{p \in \mathcal{P} \mid \text{neodok}(p)\}$.

Sei $\mathcal{F}^{\mathcal{D}} = \{\mathcal{D}_f \mid f \in A\} \cup \{\mathcal{D}_n \mid \text{neu}\}$. Dann ist $|\mathcal{F}^{\mathcal{D}}| = \omega_1$.

Also ex. nach MA_{ω_1} ein $\mathcal{F}^{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{Q}$, das alle $\mathcal{D} \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$

scheidet. Setze $g = \bigcup \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Dann ist $g: \omega \rightarrow 2$ mit $g \notin A$.

□

Unser Beweis zeigt:

$$\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \text{ex. keine Suslinbäume}).$$

Gilt auch

$$\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \text{GCH} + \text{ex. keine Suslinbäume})?$$

(18)

Ja! Aber das kann man nicht durch iteriertes Forcing mit endlichem Träger zeigen. Denn jede Iteration der Länge ω von nicht trivialen Forcings fügt eine Cohen-reelle Zahl hinzu.

Genauer: Sei $\langle \mathbb{P}_\beta \mid \beta \leq \omega \rangle$ eine Iteration gegeben durch $\langle \dot{Q}_\beta \mid \beta < \omega \rangle$. Es gelte für alle $\beta < \omega$

$\mathbb{P}_\beta \Vdash \dot{Q}_\beta$ enthält zwei inkompatible Bedingungen.

Seien nach Maximumstyp $\dot{p}_\beta$ und $\dot{q}_\beta$ $\mathbb{P}_\beta$ -Namen mit $\mathbb{P}_\beta \Vdash \dot{p}_\beta$ und $\dot{q}_\beta$ inkompatibel in $\dot{Q}_\beta$.

Sei nun $\dot{G}$ $\mathbb{P}_\omega$ -generisch. Dann ist

$$g: \omega \rightarrow 2, \quad g(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \dot{p}^G_\beta \notin H_\beta \\ 1 & \text{falls } \dot{p}^G_\beta \in H_\beta \end{cases}$$

Def. wie früher

eine Cohen-reelle Zahl. (Übung).

Also fügt die nötige Iteration der Länge ω_2 bei Iterationen mit endlichem Träger automatisch ω_2 viele Cohen-reelle Zahlen hinzu.

Eine Möglichkeit,

$$\text{Con}(\text{ZFC}) \longrightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \text{GCH} + \text{ex. keine Suslin-Kette})$$

zu zeigen, ist Iteration mit abzählbaren Trägern.

Siehe Skizzen: Proper + Improper Forcing

Der ursprüngliche Beweis stammt von Jensen und benutzt eine speziell für diesen Zweck definierte Iteration.

Siehe: Devlin + Johnstone: The Suslin Problem.