5. Moraste

Offene Frage: GCH $\to$ ex. ω_2-Suslinbaum?

Anders gefragt: Con (ZFC + GCH + ex. kein ω_2-Suslinbaum)?

Können zumindest wir eine untere Schranke für die Konsistenzstärke angeben?

Eine untere Schranke ist eine Mahlo Kardinalzahl.

Denn es gilt:

$$CH + 2^{\omega_1} = \omega_2 + \text{ex. kein } \omega_2\text{-Suslinbaum}$$

$$\longrightarrow \omega_2^V \text{ ist Mahlo in } L$$

Siehe: J. Gregory, Higher Souslin trees, JSL 41 (1976), 663 - 671

bzw. Abschnitte 2 + 3

Wir wollen im Folgenden zeigen,

$$CH + \text{ex. kein } \omega_2\text{-Suslinbaum}$$

$$\longrightarrow \omega_2^V \text{ ist unerreichbar in } L$$

Siehe auch: S. Shelah + L. Stanley, S-Forcing,

Israel J. of Math. 43 (1982), 185–224

Wir benutzen einen vereinfachten $(\omega_1, 1)$-Morast.

Sei $\kappa \geq \omega$ regulär. Ein vereinfachter $(\kappa, 1)$-Morast

ist eine Struktur $\mathfrak{M} = \langle\langle \theta_\alpha \mid \alpha \leq \kappa \rangle, \langle \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta \leq \kappa \rangle\rangle$

mit folgenden Eigenschaften:

(P0) (a) $\forall \alpha < \kappa \quad 0 < \theta_\alpha < \kappa$; $\theta_0 = 1$, $\theta_\kappa = \kappa^+$

(b) $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ ist Menge von ordnungserhaltenden Abb.

$f : \theta_\alpha \to \theta_\beta$

(P1) $|\mathcal{F}_{\alpha\beta}| < \kappa$ für $\alpha < \beta < \kappa$

(P2) $\alpha < \beta < \gamma \to \mathcal{F}_{\alpha\gamma} = \{ f \circ g \mid f \in \mathcal{F}_{\beta\gamma}, g \in \mathcal{F}_{\alpha\beta} \}$

(P3) Ist $\alpha < \kappa$, so ist $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha+1} = \{ id \upharpoonright \theta_\alpha , f_\alpha \}$

wobei $f_\alpha \upharpoonright \delta = id \upharpoonright \delta$ und $f_\alpha(\delta) = \theta_\alpha$ für ein $\delta < \theta_\alpha$

(P4) Ist $\alpha \in Lim \cap (\kappa+1)$, $\beta_1, \beta_2 < \alpha$, $f_1 \in \mathcal{F}_{\beta_1\alpha}$ und

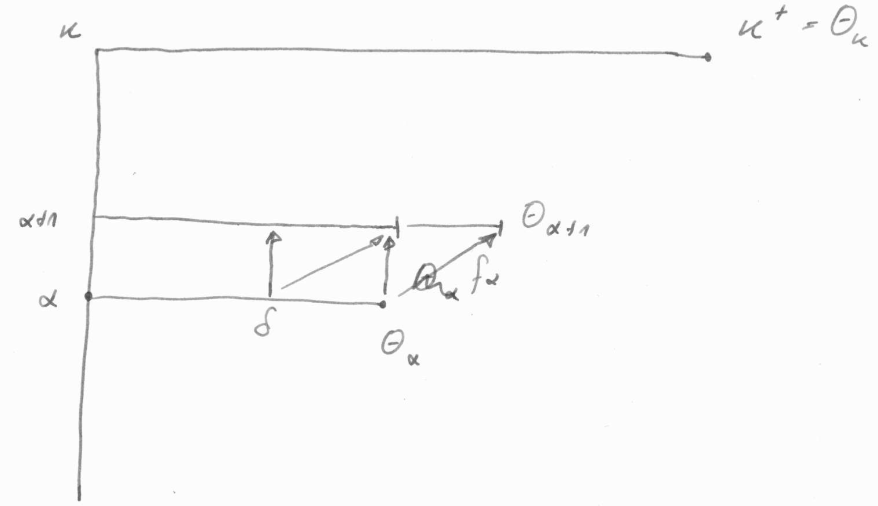
$f_2 \in \mathcal{F}_{\beta_2\alpha}$, so ex. $\beta_1, \beta_2 < \gamma < \alpha$ und $f_1' \in \mathcal{F}_{\beta_1\gamma}$,

$f_2' \in \mathcal{F}_{\beta_2\gamma}$, $g \in \mathcal{F}_{\gamma\alpha}$ mit $f_1 = g \circ f_1'$, $f_2 = g \circ f_2'$.

(P5) Für alle $\alpha > 0$ ist $\Theta_\alpha = \bigcup \{ f[\Theta_\beta] \mid \beta < \alpha, f \in \mathcal{F}_{\beta\alpha} \}$.

Bemerkung: Wegen (P5) und (P2) gilt $f_\alpha(\delta + \nu) = \Theta_\alpha + \nu$ für alle $\delta + \nu < \Theta_\alpha$ und f_α, δ wie in (P3).

Einen vereinfachten $(\kappa, 1)$-Morast kann man folgendermaßen veranschaulichen:



Ein vereinfachter $(\kappa, 1)$-Morast induziert in natürlicher Weise einen Baum. Setze dazu

$$T = \{ \langle \alpha, \gamma \rangle \mid \alpha \in \kappa, \; \nu < \theta_\alpha \} = \bigcup_{\alpha \leq \kappa} \{\alpha\} \times \theta_\alpha .$$

Für $t = \langle \alpha, \nu \rangle \in T$ sei $\alpha(t) = \alpha$ und $\nu(t) = \nu$.

Definiere $<$ auf T durch

$$\langle \alpha, \nu \rangle < \langle \beta, \tau \rangle \;:\Longleftrightarrow\; \alpha = \beta \text{ und } \nu < \tau .$$

Dann ist $<$ eine partielle Ordnung auf T.

Setze $Pr(t) = \{ s \mid s \leq t \}$.

Definiere $\prec$ auf T durch:

$$s = \langle \alpha, \nu \rangle \prec \langle \beta, \tau \rangle = t$$

$$:\Longleftrightarrow \alpha < \beta \text{ und ex. } f \in \mathcal{F}_{\alpha\beta} \text{ mit } f(\nu) = \tau .$$

Dann ist $f \upharpoonright \nu + 1$ aufgrund des folgenden Lemmas eindeutig bestimmt.

Wir können also $\pi_{st} : Pr(s) \longrightarrow Pr(t)$ durch

$$\pi_{st}(\langle \alpha, \gamma \rangle) = \langle \beta, f(\gamma) \rangle \quad \text{definieren.}$$

Lemma

Seien $\alpha < \beta \leq \kappa$, $\tau_1, \tau_2 \in \Theta_\alpha$, $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ und $f_1(\tau_1) = f_2(\tau_2)$. Dann ist $\tau_1 = \tau_2$ und $f_1 \upharpoonright \tau_1 = f_2 \upharpoonright \tau_2$.

Beweis durch Induktion über β. Der Induktionsanfang ist $\beta = \alpha + 1$. Aber in diesem Fall folgt die Behauptung direkt aus (P3). Sei also $\beta = \gamma + 1$. Dann wähle nach (P2) $f_i = f_i' \circ g_i$ ~~mit~~ $(i = 1, 2)$ mit $f_i' \in \mathcal{F}_{\alpha\gamma}$, $g_i \in \mathcal{F}_{\gamma\beta}$. Sei $\tau_i' = f_i'(\tau_i)$. Dann gilt wie beim Induktionsanfang, dass $\tau_1' = \tau_2'$ und $\cancel{f_1' \upharpoonright \tau_1 = f}$ $g_1 \upharpoonright \tau_1' = g_2 \upharpoonright \tau_2'$ ist. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung $\tau_1 = \tau_2$ und $f_1' \upharpoonright \tau_1 = f_2' \upharpoonright \tau_2$. Somit $f_1 \upharpoonright \tau_1 = f_2 \upharpoonright \tau_2$.

Sei schließlich $\beta \in \mathrm{Lim}$. Dann ex. nach (P4) $\alpha < \gamma < \beta$ und $g \in \mathcal{F}_{\gamma\beta}$ mit $f_i = f_i' \circ g_i$, $f_i' \in \mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ für $i = 1, 2$. Also ist $f_1'(\tau_1) = f_2'(\tau_2)$. Somit gilt $\tau_1 = \tau_2$ und $f_1' \upharpoonright \tau_1 = f_2' \upharpoonright \tau_2$ nach Induktionsvoraussetzung. Daher $f_1 \upharpoonright \tau_1 = f_2 \upharpoonright \tau_2$.

$\boxtimes$

Lemma

Es gilt:

(a) $<$ ist ein Baum, $ht_T(t) = \alpha(t)$,

also $T_\alpha = \{ t \in T \mid \alpha(t) = \alpha \}$.

(b) $t_0 < t_1 < t_2 \longrightarrow \pi_{t_0 t_1} = \pi_{t_1 t_2} \circ \pi_{t_0 t_1}$

(c) Sei $s < t$ und $\pi = \pi_{st}$. Dann ist π ordnungserhaltend.

Und ist $\pi(s_0) = t_0$, so ist $s_0 < t_0$ und $\pi_{s_0 t_0} = \pi \upharpoonright Pr(s_0)$

(d) Sei $\gamma \in \mathrm{Lim} \cap (\omega+1)$. Sei $t \in T_\gamma$.

Dann ist $Pr(t) = \bigcup \{ \mathrm{rng}(\pi_{st}) \mid s < t \}$.

Beweis:

(a) Wir zeigen zunächst, dass $<$ transitiv ist. Sei dazu $\langle \alpha, \nu \rangle < \langle \beta, \tau \rangle$ gegeben durch $f \in \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ und $\langle \beta, \tau \rangle < \langle \gamma, \zeta \rangle$ durch $g \in \mathcal{F}_{\beta\gamma}$. Setze $h = g \circ f$. Dann ist $h \in \mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ nach (P2) und $h(\nu) = \zeta$. Also $\langle \alpha, \nu \rangle < \langle \gamma, \zeta \rangle$.

Seien nun $\langle \alpha, \nu \rangle, \langle \beta, \tau \rangle < \langle \gamma, \zeta \rangle$, $\langle \alpha, \nu \rangle \neq \langle \beta, \tau \rangle$.

Dann folgt aus dem vorherigen Lemma $\alpha \neq \beta$. Sei also o.E. $\alpha < \beta$. Sei $\langle \alpha, \nu \rangle \prec \langle \gamma, \eta \rangle$ gegeben durch $f \in \mathcal{F}_{\alpha\gamma}$.

Nach (P2) wähle $g \in \mathcal{F}_{\beta\gamma}$ und $h \in \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ mit $f = g \circ h$.

Dann gilt $\langle \alpha, \nu \rangle \prec \langle \beta, h(\nu) \rangle \prec \langle \gamma, \eta \rangle$. Wieder nach dem vorherigen Lemma ist aber $h(\nu) = \tau$. Also $\langle \alpha, \nu \rangle \prec \langle \beta, \tau \rangle$.

Somit ist $\prec$ ein Baum.

Nach (P2) gilt für $t \in T$: Ist $\beta < \alpha(t)$, so ex. $s < t$ mit $\alpha(s) = \beta$.

Daraus folgt $ht_T(t) = \alpha(t)$.

(b) folgt direkt aus (a) und der Definition.

(c) Sei $s \prec t$ gegeben durch $f \in \mathcal{F}_{\alpha\beta}$. Dann ist f ordnungserhaltend, also ist π ordnungserhaltend. Ist $\pi(s_0) = t_0$, so ist $f(\nu(s_0)) = \nu(t_0)$.

Daraus folgt der Rest.

(d) Es reicht $Pr(t) \subseteq \bigcup \{ rng(\pi_{st}) \mid s \prec t \}$ zu zeigen.

Sei dazu $\nu = \nu(t)$ und $\tau < \nu$. Wähle nach (P5) $\alpha_1, \alpha_2 < \gamma$ und $f_i \in \mathcal{F}_{\alpha_i \gamma}$ mit $\tau \in rng(f_1)$, $\nu \in rng(f_2)$.

Nach (P4) wähle β mit $\alpha_1, \alpha_2 < \beta < \gamma$ und $f_i' \in \mathcal{F}_{\alpha_i \beta}$, $g \in \mathcal{F}_{\beta\gamma}$ mit $f_i = g \circ f_i'$. Dann sind $\tau, \nu \in rng(g)$. Sei also $g(\bar\tau) = \tau$, $g(\bar\nu) = \nu$. Somit $\bar\tau < \bar\nu$, da g ordnungserhaltend. Sei $s = \langle \beta, \bar\nu \rangle$. Dann ist $s < t$ und $\pi_{st}(\bar\tau) = \tau$.

$\boxtimes$

<u>Satz</u> Ist $\kappa > \omega$ regulär und κ^+ nicht unerreichbar in L, so ex. ein vereinfachter $(\kappa, 1)$ - Morast.

<u>Beweisidee:</u> Da κ^+ nicht unerreichbar in L ist, ex. ein $A \subseteq \kappa$ mit $\kappa^+ = (\kappa^+)^{L[A]}$. Aber in $L[A]$ ex. dann ein vereinfachter $(\kappa, 1)$ - Morast. Um dies zu zeigen, benötigt man die Methoden der Feinstruktur-theorie. Dieser Morast ist dann aber auch ein vereinfachter $(\kappa, 1)$ - Morast in V. $\boxtimes$

Wir wollen also zeigen: Ex. ein vereinfachter $(\omega, 1)$ - Morast und gilt CH, so ex. ein ω_2 - Kurepabaum.

Dazu konstruieren wir einen sogenannten ω_2 - Super - Kurepabaum.

Sei $\underset{\sim}{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ ein Baum der Höhe κ. Eine Folge $\vec{x} = \langle x_i \mid i < \lambda \rangle$ heißt eine Stufenfolge in T_α, wenn $\vec{x}$ injektiv und $x_i \in T_\alpha$ ist für alle $i < \lambda$.

(vgl. Definition von Pseudozweig).

Sei $Lev_\lambda(\underset{\sim}{T}) = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \langle x_i \mid i < \lambda \rangle$ ist Stufenfolge in $T_\alpha, \alpha < \kappa \}$.

die Menge aller Stufenfolgen von $\underset{\sim}{T}$.

Für $\vec{x}, \vec{y} \in Lev_\lambda(\underset{\sim}{T})$ setze $\vec{x} \leq \vec{y}$ falls $x_i \leq_T y_i$ für alle $i < \kappa$.

Sei $Lev^2_\lambda(\underset{\sim}{T}) = \{ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \mid \vec{x} \leq \vec{y} \ , \ \vec{x}, \vec{y} \in Lev_\lambda(\underset{\sim}{T}) \}$.

Ein κ^{++}-super-Kirchbaum ist ein normaler Baum $\underset{\sim}{T}$ der Höhe κ^{++}, so dass ein $F : Lev^2_\kappa(\underset{\sim}{T}) \longrightarrow \kappa^+$ ex. mit:

(*) Ist $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{z})$, dann ex. $i < \kappa$, so dass y_i und z_i vergleichbar sind.

Erinnerung: Ein Baum $\underset{\sim}{T}$ heißt normal, wenn:

(1) $\underset{\sim}{T}$ hat einen (eindeutig bestimmten) kleinsten Punkt

(2) Ist x nicht maximal in $\underset{\sim}{T}$, so hat es ~~unde~~ unendlich viele Nachfolger auf der nächsten Stufe.

(3) Jedes $x \in T$ hat ~~ko~~ Nachfolger auf jeder höheren Stufe

(4) ~~für~~. Gilt $ht_T(x) = ht_T(y) \in Lim$ und $\{z \mid z < x\} = \{z \mid z < y\}$, so ist $x = y$.

~~Also~~ Ähnlich wie Suslinbäume mit Pseudozweig sind auch super-Suslinbäume schwer zu zerstören: Ein κ^{++}-super-Suslinbaum bleibt κ^{++}-super-Suslin in generischen Erweiterungen außer es werden neue Teilmengen von κ ~~zu~~ hinzugefügt oder κ^{++} wird kollabiert.

<u>Lemma</u> Ex. ein κ^{++}-super-Suslinbaum $\underset{\sim}{T}$, so ex. auch ein κ^{++}-Suslinbaum.

<u>Beweis:</u> Ang. nicht. Dann ex. wg. Normalität in $\underset{\sim}{T}$ eine Antikette der Größe κ^{++}. Also ex. eine Stufe der Größe κ. Sei $\vec{x} = \langle x_i \mid i < \kappa \rangle$ eine Stufenfolge in $\underset{\sim}{T}$. Für $i < \kappa$ sei $T_i = \{ y \in T \mid x_i \leq_T y \}$. Ist keines der $\underset{\sim}{T_i}$ ein κ^{++}-Suslinbaum, dann ex. in jedem $\underset{\sim}{T_i}$ eine Antikette A_i der Größe κ^{++}. Die Antikette A_i ist für weniger als κ-viele i in $\underset{\sim}{T_i}$ beschränkt. Denn angenommen in κ-vielen Fällen wäre A_i in $\underset{\sim}{T_i}$ beschränkt. Dann gäbe es eine Stufenfolge $\vec{x}\,'$ und κ^{++}-viele Stufenfolgen $\vec{y}_\alpha{}' \geq \vec{x}\,'$, so dass für alle $\alpha \neq \beta < \kappa^{++}$ $\vec{y}_\alpha{}'$ und $\vec{y}_\beta{}'$ nirgendwo vergleichbar sind.

Das widerspricht aber (*). Wir können also annehmen, dass A_i in $\underset{\sim}{T}_i$ stets unbeschränkt ist. Definiere nun durch Induktion über $\alpha < \kappa^{++}$ Stufenfolgen $\vec{y}(\alpha) = \langle y_i(\alpha) \mid i < \kappa \rangle$ und Elemente $t_i(\alpha) \in A_i$, so dass $x_i <_T t_i(\alpha) <_T y_i(\alpha)$ und $ht_T(y_i(\alpha)) < ht_T(t_i(\beta))$ für alle $i < \kappa$, $\alpha < \beta < \kappa^{++}$.

Dann gibt es $\alpha, \beta < \kappa^{++}$, so dass $F(\vec{x}, \vec{y}(\alpha)) = F(\vec{x}, \vec{y}(\beta))$, denn $\mathrm{rng}(F) \leq \kappa^+$. Also gibt es nach Definition von super-Souslin ein $i < \kappa$, so dass $x_i <_T t_i(\alpha) <_T y_i(\alpha) <_T t_i(\beta) <_T y_i(\beta)$.

Aber das widerspricht der ~~Definition~~ Tatsache, dass die A_i Antiketten sind. $\boxtimes$

Ein Baum $\underset{\sim}{T}$ der Höhe Θ heißt <u>verzweigt</u>, falls es eine injektive Funktion $\langle b_x \mid x \in T \rangle$ gibt, so dass b_x ein Zweig durch x der Länge Θ gibt.

Satz Ex. ein vereinfachter $(\omega_1, 1)$-Morast und gilt CH, so ex. ein ω_2-super-Suslinbaum

Beweis: Wir konstruieren entlang des Morastbaumes $\langle T, < \rangle$ eine Folge $\langle B_t \mid t \in T \rangle$ mit

(a) $\langle B_t, \leq_t \rangle$ ist ein normaler Baum

(b) $ht(B_t) = \omega(\nu(t)+1)$

(c) $B_t \subseteq (Pr(t) \times (\ldots +\omega)) \times \eta$ for some $\exists \eta \in \omega_1$; ~~$\in \mathcal{O}_t$~~ (Trägermenge!)

(e) $|B_t| \leq \omega$ für $t \notin T_{\omega_1}$

(f) B_s ist Anfangsstück von B_t, falls $s < t$.

(d) Die Elemente der $(\nu(s)+n)$-ten Stufe sind ~~von~~ diejenigen von der Form $\langle\langle s, n\rangle, \eta\rangle$.

Außerdem konstruieren wir eine Folge $\langle F_t \mid t \in T \rangle$ von Funktionen $F_t : dom(F_t) \longrightarrow \omega_1$ mit

(1) $dom(F_t) \subseteq Lev^2_\omega(B_t)$

(2) $|dom(F_t)| \leq \omega$ für $t \notin T_{\omega_1}$

(3) $F_s \subseteq F_t$ für $s < t$.

Dabei garantieren wir:

(*) Ist $F_t(\vec{x}, \vec{y}) = F_t(\vec{x}, \vec{z})$, dann gilt $y_n \leq_t z_n$ oder $z_n \leq_t y_n$ für <u>unendlich</u> viele $n \in \omega$.

Desweiteren konstruieren wir ein kommutatives System

$\langle \sigma_{\bar t t} \mid \bar t < t \rangle$ von ordnungserhaltenden Abb. $\sigma_{\bar t t} : B_{\bar t} \to B_t$,

so dass $F_t(\overrightarrow{\sigma_{\bar t t}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar t t}(y)}) = F_{\bar t}(\vec{x}, \vec{y})$.

Sei $\langle X_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ eine Aufzählung von $\mathcal{P}_{\omega_1}(\cancel{T}\ T \times \omega_1 \times \omega) = \{ x \subseteq \cancel{T}\ T \times \omega_1 \times \omega \mid \mathrm{card}(x) < \omega_1 \}$,

~~so dass $X_\alpha \subseteq$~~. Hier benutzen wir CH.

Setze $B_\alpha := \bigcup \{ B_t \mid t \in T_\alpha \}$, $\leq_\alpha = \bigcup \{ \leq_t \mid t \in T_\alpha \}$, $F_\alpha = \bigcup \{ F_t \mid t \in T_\alpha \}$.

Unser gesuchter ω_2-super-Suslinbaum wird B_{ω_1} sein.

Wir definieren B_α durch Rekursion über $\alpha \leq \omega_1$.

1. Fall: $\alpha = 0$

Dann hat T_α genau ein Element $t = \langle 0, \emptyset \rangle$.

Wähle also $B_0 = B_t$ einen beliebigen normalen Baum der Höhe ω, ~~B...~~ so dass $B_0 \subseteq (\{t\} \times \omega) \times \omega$ und die Elemente der n-ten Stufe von der Form $\langle\langle t, n \rangle, m \rangle$ sind.

2. Fall: $\alpha = \beta + 1$

Setze zunächst B_β zu einem normalen, verzweigten Baum $\langle \overline{B}_\beta, \in_\beta \rangle$, $\overline{B}_\beta \supseteq B_\beta$ der selben Höhe ~~fort.~~ mit den Eigenschaften (c), (d), (e) fort.

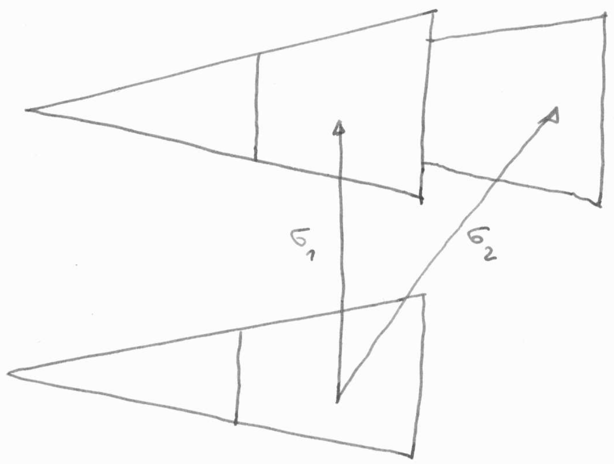
Nach (P3) gilt $F_{\beta\alpha} = \{ id \restriction \Theta_\beta, f_\beta \}$.

Für $x = \langle\langle\langle \beta, \gamma \rangle, \nu \rangle, \eta \rangle$ setze

$$\sigma_1(x) = \langle\langle\langle \alpha, \gamma \rangle, \nu \rangle, \eta \rangle$$

$$\sigma_2(x) = \langle\langle\langle \alpha, f_\beta(\gamma) \rangle, \nu \rangle, \eta \rangle .$$

Sei $B_\alpha = \sigma_1[\overline{B}_\beta] \cup \sigma_2[\overline{B}_\beta]$



~~Sind Ist~~ $\cancel{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in Lev^2_\alpha(\overline{B}_\beta)}$, ~~so setze~~

$$\cancel{F_\alpha(\overrightarrow{\sigma_1(x)}, \overrightarrow{\sigma_1(y)}) = F_\beta(\vec{x}, \vec{y})}$$

$$\cancel{F_\alpha(\overrightarrow{\sigma_2(x)}, \overrightarrow{\sigma_2(y)}) = F_\beta(\vec{x}, \vec{y})} .$$

Wir erweitern $\sigma_1[\bar{\leq}_\beta] \cup \sigma_2[\bar{\leq}_\beta]$ zu einer Baumordnung auf B_α mit Eigenschaft (d).

Sei dann $G : \omega \to D$ mit

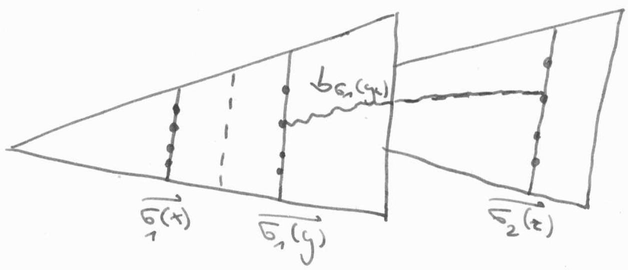
$$D = \{\langle \vec{x},\vec{y},\vec{z}\rangle \mid F_\beta(\vec{x},\vec{y}) = F_\beta(\vec{x},\vec{z}),\ \langle \vec{x},\vec{y}\rangle, \langle \vec{x},\vec{z}\rangle \in Lev_\omega^2(B_\beta),\ \vec{z} \text{ Stufenfolge in } \cancel{\mathrm{dom}(\sigma_2) - \mathrm{dom}(\sigma_1)}\ \mathrm{dom}(\sigma_2 \setminus \sigma_1)\}$$

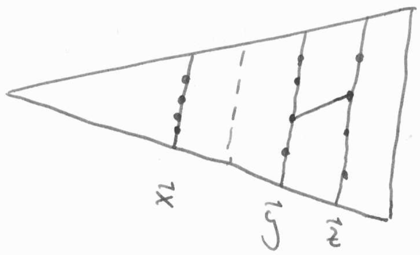
<u>surjektiv</u>, so dass $|G^{-1}[\{\langle \vec{x},\vec{y},\vec{z}\rangle\}]| = \omega$ für alle $\langle \vec{x},\vec{y},\vec{z}\rangle \in D$ gilt.

Sei $n_0 = 0$.

Ist $G(i) = \langle\langle x_n \mid n \in \omega\rangle, \langle y_n \mid n \in \omega\rangle, \langle z_n \mid n \in \omega\rangle\rangle$, dann sei n_{i+1} das kleinste $n > n_i$, so dass $y_n \leq_\beta z_n$ oder $z_n \leq_\beta y_n$ ist.

Definiere $\leq_\alpha$ so, dass $\sigma_2(z_{n_i})$ über $b_{\sigma_1(y_{n_i})}$ liegt, falls $y_{n_i} \geq_\beta z_{n_i}$ ist, und über $b_{\sigma_1(z_{n_i})}$, falls $y_{n_i} \leq_\beta z_{n_i}$ gilt. Dabei sei $\langle b_x \mid x \in \cancel{B}\ \sigma_1[\bar{B}_\beta]\rangle$ wie in der Definition von verzweigt.





Die induktive Definition von n_i bricht niemals ab, da nach Induktionsvoraussetzung unendlich viele $n \in \omega$ existieren, so dass $y_n \leq_\beta z_n$ oder $z_n \leq_\beta y_n$ gilt.

Ist nun $t \in \operatorname{dom}(\sigma_2 \setminus \sigma_1)$ und $\neg \exists i \in \omega \; z_{n_i} \leq_\beta t$, dann ist die Position von $\sigma_2(t)$ in $\leq_\alpha$ noch nicht bestimmt. Definiere $\leq_\alpha$ so, dass $\sigma_2(t)$ über $b_{\sigma_1(t)}$ liegt. Dadurch wird die Position von $\sigma_2(t)$ in $\leq_\alpha$ und von allen $\sigma_2(u)$ für $t \leq_\beta u$ festgelegt. Rekursiv kann man für alle ~~b~~ $\sigma_2(t)$, $t \in \overline{B}_\beta$ so einen Platz wählen. Dadurch wird σ_2 zu einer ordnungserhaltenden Einbettung $\sigma_2 : \overline{B}_\beta \longrightarrow B_\alpha$.

Für $t \in T_\alpha$ definiere nun $\mathcal{B}_t$ als $\mathcal{B}_\beta$ eingeschränkt auf die Höhe $\omega(\nu(t)+1)$.

Für $\bar{t} < t$ setze

$$\sigma_{\bar{t}t}(\langle\langle\bar{s}, n\rangle, \eta\rangle) = \langle\langle \pi_{\bar{t}t}(\bar{s}), n\rangle, \eta\rangle.$$

Ist $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle \in \mathrm{dom}(F_\beta)$, so setze

$$F_\alpha(\overrightarrow{\sigma_1(x)}, \overrightarrow{\sigma_1(y)}) = F_\beta(\vec{x}, \vec{y})$$

$$F_\alpha(\overrightarrow{\sigma_2(x)}, \overrightarrow{\sigma_2(y)}) = F_\beta(\vec{x}, \vec{y}).$$

Ist schließlich $X_\delta = \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle \in \mathrm{Lev}^2_\omega(\mathcal{B}_{\bar{t}})$

$\bar{t} < t$, $\bar{t} \in T_\gamma$, $t \in T_\alpha$

$\gamma, \delta \in \beta$

$\langle\overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(y)}\rangle \notin \mathrm{dom}(\sigma_1[F_\beta] \cup \sigma_2[F_\beta])$

so wähle für diese verschiedene neue Werte $F_\alpha(\overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(y)})$.

Aufgrund unserer Konstruktion gilt (*).

<u>3. Fall</u>: $\alpha \in Lim$

Für $t \in T_\alpha$ definieren wir $\langle \sigma_{st} \mid s < t \rangle$ als den direkten Limes von $\langle \sigma_{s\bar{t}} \mid s < \bar{t} < t \rangle$. Dadurch ist dann auch

$B_t = \bigcup \{ rng(\sigma_{\bar{t}t}) \mid \bar{t} < t \}$, $\leq_t = \bigcup \{ \sigma_{\bar{t}t} [\leq_{\bar{t}}] \mid \bar{t} < t \}$,

$B_\alpha = \bigcup \{ B_t \mid t \in T \}$ und

$$F_t(\vec{x}, \vec{y}) = y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \bar{t} < t : rng(\vec{x}) \cup rng(\vec{y}) \subseteq rng(\sigma_{\bar{t}t})$$
$$\wedge \; F_{\bar{t}t}(\overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}^{-1}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}^{-1}(y)}) = y$$

eindeutig bestimmt.

Genauer: Sei S die Menge aller Paare $\langle s, x \rangle$ mit $s < t$ und $x \in B_s$. Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf S durch

$$\langle s, x \rangle \sim \langle s', x' \rangle \quad :\Longleftrightarrow \quad \sigma_{ss'}(x) = x'$$
$$\vee \; \sigma_{s's}(x') = x$$
$$\vee \; (s' = s \wedge x = x').$$

Sei $B = S/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen und bezeichne $[\langle s, x \rangle]$ die Äquivalenzklasse, die $\langle s, x \rangle$ ~~als~~ enthält.

Setze $\sigma'_{st}(x) = [\langle s, x\rangle]$.

Nach (d) des Lemmas über die Eigenschaften von $\langle \pi_{\bar{t}t} \mid \bar{t} < t\rangle$ gilt $Pr(t) = \bigcup\{rng(\pi_{st}) \mid s < t\}$. Und nach Induktionsvoraussetzung ~~gilt~~ sind die $\mathcal{B}_s$ Bäume mit

(b) $ht(\mathcal{B}_s) = \omega\cdot(\nu(s)+1)$

(c) $\exists \eta \in On : \mathcal{B}_s \subseteq (Pr(s)\times\omega)\times\eta$

(d) Die Elemente der $(\nu(\bar{t})+1)$-ten Stufe von $\mathcal{B}_s$ sind diejenigen der Form $\langle\langle \bar{t}, n\rangle, \eta\rangle$,

für alle $s < t$. Außerdem gilt nach Konstruktion stets

$$\sigma_{s\bar{t}}(\langle\langle u, n\rangle, \eta\rangle) = \langle\langle \pi_{s\bar{t}}(u), n\rangle, \eta\rangle.$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{B}$ isomorph zu einem Baum $\mathcal{B}_t$ ist, der (b), (c), (d) erfüllt. Sei $\pi : \mathcal{B} \cong \mathcal{B}_t$. Dann setze

$$\sigma_{st} = \pi \circ \sigma'_{st}.$$

Die Normalität von B_t zeigt man ähnlich.

Wollen wir z.B. zeigen, dass jedes $x \in B_t$ einen Nachfolger auf jeder höheren Stufe ~~hat~~ T_η hat, so wählen wir ein $s < t$ mit $x \in rng(\sigma_{st})$ und $\eta \in rng(\pi_{st})$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat $\sigma_{st}^{-1}(x)$ dann einen Nachfolger y in $\leq_s$ auf der Stufe $T_{\pi_{st}^{-1}(\eta)}$. Somit ist $\sigma_{st}(y)$ ein Nachfolger von x auf der Stufe T_η.

Auch dass B_s ein Anfangsstück von B_t ist für $s < t \in T_\alpha$, zeigt man mit ähnlichen Argumenten.

~~Eb~~ ~~Dass~~ Ebenso die Eigenschaften $(1) + (3)$ von F_t und $(*)$.

Dass $|B_t| \leq \omega$ und $|dom(F_t)| \leq \omega$ für $t \notin T_{\omega_1}$, folgt unmittelbar $B_t = \bigcup \{ rng(\sigma_{\bar t t}) \mid \bar t < t \}$ und

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in dom(F_t) \iff \exists \bar t < t : \cancel{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in dom} \; \langle \overrightarrow{\sigma_{\bar t t}^{-1}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar t t}^{-1}(y)} \rangle \in dom(F_{\bar t}).$$

Betrachte nun $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{\omega_1}$ und $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\omega_1}$.

$\mathcal{B}$ ist ein ω_2-super-Suslinbaum. Dies wird von $\mathcal{F}$ bezeugt. Um dies zu sehen, sei $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in Lev^2_\omega(\mathcal{B})$.

Sei $t \in T_{\omega_1}$ mit $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in Lev^2_\omega(\mathcal{B}_t)$. Wegen (*) reicht es $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in dom(\mathcal{F}_t)$ zu zeigen. Da aber $\mathcal{B}_t = \{\sigma_{\bar{t}t}[\mathcal{B}_{\bar{t}}] \mid \bar{t} < t\}$ und $otp(\{\bar{t} \mid \bar{t} < t\}) = \omega_1$ ist, ex. ein $\bar{t} < t$ mit

~~$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in Lev^2_\omega(\mathcal{B}_{\bar{t}})$~~ $rng(x) \cup rng(y) \subseteq rng(\sigma_{\bar{t}t})$.

Wähle ein solches fest. Dann ist nach Definition von $\sigma_{\bar{t}t}$

$\langle \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}^{-1}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}^{-1}(y)} \rangle \in Lev^2_\omega(\mathcal{B}_{\bar{t}})$ und nach Definition

von $\langle X_\delta \mid \delta < \omega_1 \rangle$ ex. ein δ mit $X_\delta = \langle \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(y)} \rangle$.

Sei nun $\bar{t} < s < t$ mit $\delta < \alpha(s)$. Und angenommen $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \notin dom(\mathcal{F}_t)$.
ein Nachfolger in α.

Dann wäre nach Definition von $\mathcal{F}_t$ bzw. σ_{st}, $\sigma_{\bar{t}t}$ auch

$\langle \sigma_{st}^{-1}(x), \sigma_{st}^{-1}(y) \rangle \notin dom(\mathcal{F}_s)$ und $X_\delta = \langle \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(x)}, \overrightarrow{\sigma_{\bar{t}t}(y)} \rangle \notin dom(\mathcal{F}_{\bar{t}})$.

Das widerspricht aber der Definition von $\mathcal{F}_s$

(siehe Nachfolgerfall).

$\boxtimes$

(vereinfachter)

Ein $\gamma(\kappa, 1)$ - Morast ist also ein kombinatorisches Prinzip, das es ermöglicht eine Struktur der Größe κ^+ aus Teilen der Größe $< \kappa$ aufzubauen. Um größere Strukturen aus Teilen $< \kappa$ zu konstruieren hat Jensen auch sogenannte "higher-gap morasses" eingeführt. Für die "gap-2" Moraste siehe z. B.

D. Velleman: Simplified Gap-2 Morasses,

APAL 34 (1987), 171 - 208.